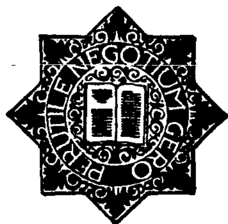
EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

12e JAARGANG 1935/36, Nr. 1.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang ƒ 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (ƒ 6.—) of op „Christiaan Huygens" (ƒ 10.—) zijn ingetekend, betalen ƒ 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN

Binnenland

$1^1/_2$ cts.

Aan de N.V. Erven P. NOORDHOFF's

Uitgeverszaak

POSTBUS 39

GRONINGEN

Postbus . . . No. 39
Giro Ned. Bank No. 1858
Postgiro . . No. 6593

De ondergeteekende verzoekt te zenden
direct per post
door bemiddeling van den boekhandelaar:

....

....

.... ex. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Adres: ....

....

....

HISTORISCHE REVUE

DOOR

E. J DIJKSTERHUIS.

Hk. de Vries. *Historische Studiën.* Deel II. Groningen (Noordhoff) 1934. 281 blz.

In dit tweede deel zijner *Historische Studiën* verzamelt Prof. de Vries opnieuw een aantal artikelen van historisch-mathematischen aard, die in den loop der jaren verschenen zijn in het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde,* maar die door menigeen met graagte herlezen zullen worden, nu zij hier in samenhang worden aangeboden. Het zal niet noodig zijn, veel te zeggen over de wijze, waarop de schrijver zijn onderwerpen behandelt; iedereen kent uit zijn leerboeken en zijn vroegere historische artikelen den helderen, gemoedelijken, soms wat breedsprakigen en gaarne ietwat moraliseerenden betoogtrant, waarvan de menschelijkheid zoo sterk contrasteert met het volstrekt onpersoonlijke karakter, dat men tegenwoordig inhaerent acht aan den wetenschappelijken stijl, en die den schrijver een eigen plaats verschaft onder de wiskundige auteurs van ons land. Van den inhoud van dit tweede deel zijn ongetwijfeld het belangrijkste de verhandelingen over Möbius, wiens Barycentrische Calcül in zijn groote historische beeekenis wordt geschetst, en Plücker, van wiens fundamenteel werk voor de ontwikkeling der Analytische Meetkunde een uitvoerig overzicht wordt gegeven. Daarnaast vindt men biographische artikelen over Euler en Lagrange, die niet veel meer geven dan een korte samenvatting van wat men in meer uitvoerige werken over hen kan vinden en die naast de belangrijke voorafgaande studies teleurstellen. De schrijver merkt weliswaar volkomen terecht op, dat niemand in staat zou zijn, het levenswerk van een man als Euler volledig te schetsen, maar dit had hem niet behoeven te beletten, althans een deel van zijn mathematisch werk (b.v. de onderzoekingen, die ten grondslag liggen aan de variatierekening) volgens de bij Plücker en Möbius

toegepaste methode te behandelen. De bundel wordt geopend met een studie over de projectieve meetkunde der Grieken en een over Desargues. De schrijver blijkt te volharden in de Deel I voorkomende onjuiste meening, dat Apollonios de kegelsneden zou hebben voortgebracht door een scheeven cirkelkegel te snijden met een vlak, dat loodrecht staat op het vlak, dat door de as loodrecht op het grondvlak gebracht is. Ik heb in een bespreking van het eerste deel in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs reeds erop gewezen, dat deze meening een volkomen miskenning inhoudt van het meest essentieele karakter van het werk van Apollonios en dat reeds een oppervlakkige lectuur van de *Conica* de onjuistheid ervan aan het licht brengt. Dat de schrijver zich desondanks nu nog niet de moeite heeft gegeven, eens even de *Conica* in te zien en zich ervan te overtuigen, dat Chasles werkelijk ongelijk heeft, als hij in zijn *Aperçu Géométrique* de opvatting verkondigt, die hij ook tot de zijne maakt, is mij volstrekt onbegrijpelijk.

Federigo Enriques, *Signification de l'historie de la Pensée Scientifique.* Paris (Hermann) 1934. 68 blz. 12 frs.

De bekende Italiaansche wiskundige F. Enriques geeft in dit werkje een korte samenvatting van de denkbeelden over de waarde en de methode der wetenschapsgeschiedenis, die hem hebben geleid bij het schrijven van zijn groote, in samenwerking met de Santillana ontstane *Storia del Pensiero Scientifico,* die hieronder zal worden aangekondigd. Zijn grondgedachte is, dat de geschiedenis van het wetenschappelijk denken, wel verre van te kunnen worden beschouwd als een objectieve registratie van aanwinsten van ons weten en kunnen, integendeel tot op zekere hoogte a priori moet worden geconstrueerd en dat zij in zooverre op een lijn staat met de experimenteele natuurwetenschap, welker empirische resultaten ook slechts beteekenis hebben binnen het kader der theorie, die aanleiding gaf, ze op te sporen. Dit denkbeeld is gebaseerd op het postulaat van de eenheid der menschelijke rede, dat ertoe dwingt, de dwaling te zien als noodzakelijke phase in de nooit te voltooien evolutie van het denken in zijn achtervolging van een eenige onbereikbare waarheid en het zin-looze te verklaren als een formeel residu van wat eens levend inzicht was, en dat dus den historicus der wetenschap den plicht oplegt, zich ten volle te verplaatsen in het denken van de periode, die hij bestudeert en de mogelijkheid

van het volstrekt onbegrijpelijke eenvoudig te ontkennen. Een paradoxale opvatting als deze behoeft verdediging naar velerlei kanten, die de levendige en strijdlustige auteur haar dan ook niet onthoudt. Die verdediging valt wel wat kort uit en het duizelt den lezer wel eens, wanneer hij in enkele bladzijden met de positivistische opvatting der natuurwetenschap, met Mach's beginsel der denk-oeconomie, met Kant's theorie van de onveranderlijke vormen der zinnelijkheid, met het romantisch idealisme en met het pragmatisme ziet afrekenen. Voegt men daarbij nog, dat de schrijver zich uitspreekt over den samenhang van de ontwikkeling der wetenschap met den algemeenen cultureelen, politieken en oeconomischen toestand der maatschappij en over de verheldering van inzicht in de wijsgeerige problemen, die de wetenschapsgeschiedenis kan geven, dan zal men in ieder geval eenigen indruk hebben van den rijkdom der denkbeelden, die in het boeiend geschreven werkje, zooal niet ten volle ontwikkeld, dan toch in groote lijnen geschetst worden.

F. Enriques e G. de Santillana. *Storia del Pensiero Scientifico.* Vol. I. *Il Mondo Antico.* Bologna (N. Zanichelli) 1932; 682 blz.

Wat in het hierboven besproken werkje nog programma was, wordt in dit fraai uitgevoerde, met vele interessante afbeeldingen verluchte eerste deel van een algemeene geschiedenis van het wetenschappelijk denken tot werkelijkheid. Reeds dadelijk geeft Anaximander den schrijver aanleiding tot toepassing van zijn postulaat van de eenheid der menschelijke rede: dat de primitieve substantie, die ten grondslag ligt aan de veelheid der verschijnselen, het *ἄπειρον*, het oneindige, zou zijn, lijkt zinledig en het is verleidelijk, over een dergelijke hypothese heen te loopen met de overweging, dat wat het blijkbaar kan voorkomen, dat wij geen zin kunnen verbinden aan wat voor een Helleen der 6e eeuw v. Chr. aannemelijk was; zulk een houding tegenover het object van historisch onderzoek zou echter met het vooropgestelde postulaat volstrekt onvereenigbaar zijn; er moet een interpretatie worden gezocht, die wij kunnen meedenken. Het innemen van dit standpunt stelt den schrijver uiteraard niet zelden voor moeilijke problemen: de Grieksche theorieën staan menigmaal zeer ver van ons af en de berichten, waaruit wij hun inhoud moeten opmaken, zijn bovendien vaak hoogst onvolledig en onduidelijk. Het streven, aan de Pythagoraeische uitspraak: „de dingen zijn getallen" een zin te verbinden, vereischt al niet min-

der het vermogen, zich in duistere en verafliggende gedachtengangen te verplaatsen dan de abstruse speculaties der getallenmystiek en de raadseltaal van Parmenides.

Het is in overeenstemming met een andere, door den schrijver beleden opvatting over de beteekenis der wetenschapsgeschiedenis, dat hij de verklaring van de Grieksche philosophemen gaarne in de eerste plaats zoekt op wiskundig en natuurwetenschappelijk terrein. Zoo interpreteert hij op het voetspoor van Tannery de leer der Eleaten als een theorie van de materie als volle ruimte of van de ruimte als uitgebreide materie, terwijl hij eveneens de opvatting van den grooten Franschman aanvaardt, waar het de verklaring van de paradoxen van Zenoon als argumenten tegen de theorie der geometrische monaden geldt.

Op even volledige en deskundige wijze, als in het eerste boek de meer primitieve phasen, worden in de volgende boeken de perioden van rijpheid en verval van het klassieke wetenschappelijke denken geschilderd. Het zou verleidelijk zijn, er hier veel meer over te zeggen; echter is de stof zoo omvangrijk, dat men in het kader van een aankondiging als deze toch niet tot een eenigszins volledige discussie kan komen. We volstaan daarom met de opmerking, dat het werk van Prof. Enriques een zeer belangrijke aanwinst beduidt van de literatuur over het antieke wis- en natuurkundige denken, dat voortaan tot de onmisbare hulpmiddelen zal behooren van ieder, die de klassieke cultuur ook van dezen kant wil leeren kennen.

J. Pelseneer, *Esquisse du progrès de la Pensée Mathématique. Des Primitifs au IXe Congrès international des Mathématiciens.* Paris (Hermann) 1935. 160 blz.

Het doel van dit werkje is, om zonder op de techniek van het vak in te gaan, den algemeen belangstellenden lezer een indruk te geven van de veranderingen, die het wetenschappelijk ideaal der wiskundigen in den loop der tijden heeft ondergaan en daarbij verband te leggen tusschen den aard van hun streven en het karakter der groote geestesstroomingen, die in denzelfden tijd zijn waar te nemen. De schrijver ziet, in groote stappen voortgaande, het geheele verloop gedeeld in vijf tijdvakken: het primitieve, het prae-Helleensche, het Helleensche, het Cartesiaansche en het moderne, waarvan het eerste feitelijk evenmin tot de historie behoort als het laatste, omdat men het alleen kan bestudeeren aan thans bestaande natuurvolken.

Hij begint dan ook met de behandeling van een grootendeels nog ongepubliceerd materiaal over het getalbegrip van de Congonegers en vindt eerst in het mystieke element, dat sommige stammen daarin leggen, aansluiting aan de eigenlijke historie. Die aansluiting blijft natuurlijk vaag; ook als men wil aannemen, dat het historisch verloop van de primitieve phasen hetzelfde is geweest, als we tegenwoordig nog waarnemen, blijft er tusschen het getalbegrip van den Congoneger en het wiskundig werk van Egypte en Babylon een onoverbrugde klove bestaan Wat over de prae-Helleensche wiskunden gezegd wordt, is ook nog niet veel meer dan een zeer korte samenvatting van den tegenwoordigen stand van onze kennis daarvan, daarbij nogal eenzijdig Fransch georienteerd. Het Helleensche tijdvak geeft voor het eerst een kans, het eigenlijke doel van het werkje te verwezenlijken; of het bereikt is, lijkt de vraag; van samenhang van het karakter der wiskunde met „l'air du temps" (een lievelingswensch van vele historici, maar van welks vervulling nog niet veel terecht is gekomen) wordt slechts weinig gezegd en de verklaring van de begrensdheid der Grieksche wiskunde bevat naast juiste opmerkingen zooveel aanvechtbare beweringen (de Grieken zouden nooit hebben ondersteld, dat het aantal termen van een reeks onbepaald kan groeien en dat oppervlakte- of volume-elementen zoo klein kunnen worden genomen, als we zelf maar willen, terwijl toch welhaast iedere bladzijde van Archimedes het tegendeel leert!), dat ook op intern-mathematisch gebied hier geen verdieping van inzicht wordt verkregen. Meer geslaagd lijkt de algemeene karakteristiek van het Cartesiaansche tijdvak met zijn adoratie voor en overschatting van de algemeene methode, met zijn neiging tot het dogmatische, het machinale en uniforme, al kan men weer groote vraagteekens zetten bij de beschouwing van de scholastiek als bron van de herleving der wiskunde (een origineele gedachte, maar die, om meer te zijn dan een curieuse inval, heel wat betere adstructie zou vereischen dan de enkele zinnen, waarin de schrijver ze aannemelijk tracht te maken) en bij menige opmerking over Newton (de fluxierekening zou geen andere beginselen vereischen als de eindige algebra?) en het minder moeilijk vinden dan de schrijver, om bij de wiskunde van Descartes niet aan Rabelais te denken. Ten slotte de moderne tijd: de wiskunde der 19e en 20e eeuw, gekarakteriseerd en in verband met den tijdgeest beschouwd in 34 bladzijden druks, zonder dat op den technischen kant wordt ingegaan! Is het

te verwonderen, dat dit vaag blijft en oppervlakkig? Men krijgt niet veel meer te lezen dan een wel interessante selectie van uitspraken over de wiskunde van tal van bekende (vrijwel uitsluitend Fransche en Belgische) mathematici en hoewel de schrijver in zijn voorrede ons verbiedt, er aanmerkingen op te maken, dat zijn geschrift bijna een anthologie is kan ik niet nalaten, dit een weinig bevredigende wijze van behandeling te vinden. Alles tesamen genomen: een werkje met een schoon, zij het wellicht utopisch doel, maar aan zijn schrijver een zoo bovenmenschelijke taak stellend, dat men zich moeilijk iemand kan voorstellen, die er niet beneden zou zijn gebleven.

Ganesh Prasad. *Some great Mathematicians of the Nineteenth Century: Their lives and their Works. In three volumes. Volume II, with ten portraits: Cayley, Hermite, Brioschi, Kronecker, Cremona, Darboux, Cantor, Mittag-Leffler, Klein, Poincaré.* Benares City (India). Published by the Benares Mathematical Society. 1934. VI en 324 blz.

Over dit tweede deel van het werk van Prof. Prasad kunnen dezelfde opmerkingen worden gemaakt als in de vorige *Historische Revue* (*Euclides* X, 1933—'34; pag. 53) over het eerste te lezen staan. De inhoud blijkt voldoende uit den hierboven afgedrukten titel.

Josef v. Woyciechowsky. *Paul Sipos. Ein ungarischer Mathematiker des ausgehenden* 18. *Jahrhunderts. Uber seine Ellipsenrektifikation mittels Kochleoide und seine alleinstehenden logarithmisch-trigonometrischen Tafeln mit unveröffentlichen Briefen von Bode und Kästner.* Budapest (Athemaeum) 1932. 124 blz.

Paul Sipos (1759—1816), een Hongaarsch theoloog, die onder invloed van zijn wiskunde-leeraar op het Bethlen-collegium Josef v. Kovats (zelf leerling van Johannes II en Daniel Bernoulli) tot de beoefening der wiskunde was gevoerd, publiceerde in 1790/91 in de verhandelingen van de Berlijnsche Academie een beschrijving van een mathematisch instrument, den isometer, dat diende voor rectificaties van kromme lijnen. Het berust op de eigenschappen der cochleoide (d.i. de kromme met poolvergelijking $\varrho = k \frac{\sin \varphi}{\varphi}$, die ontstaat als meetkundige plaats van de eindpunten van cirkelbogen van gelijke lengte, die in hun gemeenschappelijk ander

eindpunt een gemeenschappelijke raaklijn bezitten). Sipos gebruikt het o.m. voor rectificatie van de ellips en komt daardoor tot een benaderingsformule voor den omtrek, die nog heden een der beste blijkt te zijn. De schrijver geeft een historisch overzicht van de bepalingen van den ellipsomtrek van Kepler tot op heden, waarin hij 39 verschillende formules vermeldt en bespreekt. Sipos blijkt verder de eerste Hongaar te zijn geweest, die een logarithmisch-goniometrische tafel uitgaf, waarin het quadrant verdeeld was in 100 deelen. Nadere mededeelingen over hem komen voor in een artikel van den schrijver in *Matematikai és Fizikai Lapok* XLI, 1 (1934). Beide verhandelingen zijn in het Hongaarsch geschreven; het bovenstaande is ontleend aan een Duitsche samenvatting, die de schrijver eraan toevoegde.

Raymond Clare Archibald. *Outline of the History of Mathematics*. Second Edition. The Mathematical Association of America, Inc. Oberlin, Ohio. 1934. 58 blz. 50 cents.

Dit werkje is een soort compendium van de geschiedenis der wiskunde, dat goed dienst zou kunnen doen als syllabus bij colleges in dit vak. Het is overzichtelijk en duidelijk geschreven en bevat een uitvoerige literatuurlijst. De critische lezer zal niet zelden uitspraken ontmoeten, waaraan hij moeilijk instemming kan betuigen; het zou echter onmogelijk zijn, ze hier alle op te sommen.

G. Verriest. *Évariste Galois et la théorie des équations algébriques*. Leuven (chez l'auteur). Paris (Gauthier Villars) 1934. 58 blz.

Na een korte schets van het bewogen leven van Galois en zijn ontijdig uiteinde en een historische inleiding over de oplosbaarheid van algebraische vergelijkingen brengt de schrijver de methode, die door Galois is ingevoerd, tot het begrip van den onvoorbereid gedachten lezer, zonder dat deze genoodzaakt wordt, zich in de details der toepassing te verdiepen. Dit geschiedt in den vorm van een soort gesprek, waarin hij een leerling geleidelijk doet inzien, dat wortels van een gegeven vergelijking, die in verband met den omvang van het lichaam R der coëfficienten, ononderscheidbaar zijn, geleidelijk elk hun eigen individualiteit verkrijgen door adjunctie van bepaalde grootheden aan R. Vervolgens laat hij den leerling aan zijn lot over en schetst nu in het kort het principe van de

methode, waardoor hij nu volgens Galois de opvolgende partieele resolventen kan vinden, die de achtereenvolgens te adjungeeren grootheden opleveren; hierna wordt nog het criterium voor oplosbaarheid door wortelvormen behandeld. Het helder geschreven werkje zal bij een eerste kennismaking met de schoone theorie van Galois ongetwijfeld goede diensten kunnen bewijzen.

Michael Roberts and E. R. Thomas. *Newton and the origin of Colours. A study of one of the earliest examples of scientific method.* London (G. Bell & Sons Ltd.) 1934. VI en 133 blz.

Na een biographische inleiding en een schets van het werk van Barrow en Hooke op het gebied der optica, drukken de schrijvers Newton's eerste verhandeling over licht en kleuren af, die in 1671/72 in de *Philosophical Transactions* verscheen en waarin de beroemde ontdekkingen over het spectrum behandeld worden. Vervolgens worden de polemieken geschetst, die naar aanleiding van deze publicatie rezen, met Hooke, met den Belgischen wiskundige Linus en met Chr. Huygens. Ten slotte wordt een zeer kort overzicht gegeven van de latere ontwikkeling der optica.

DE WISKUNDIGE VERDIENSTEN VAN PRINS MAURITS

DOOR

H. TURKSTRA.

Iedere wetenschappelijke beoefenaar van de wiskunde zal niet geheel overschillig staan tegenover de vraag of zijn vak al of niet toepassingen vindt in de practijk. Ofschoon weliswaar voor hem de hoogste en edelste drijfveer tot de beoefening van zijn vak is gelegen in de innerlijke geestelijke waardij en derhalve het hoogste nut van zijn vak voor hem nooit de practische toepassing kan zijn, is het hem toch aangenaam te weten, dat er grote gebieden zijn, die rechtstreeks belang hebben bij de resultaten van het wetenschappelijk onderzoek van de mathesis.

Omgekeerd is er ook een niet minder verantwoordelijke categorie van meer practische personen, die alle diensten, die de mathesis ter verheffing en veredeling van hun practisch vak aanbiedt, met vreugde aanvaarden. De besten onder dezen stellen zich zelfs met een bloot aanvaarden niet tevreden, doch wensen ook de zin der geboden wiskundige theoriën te doorgronden door n.l. de eminente ontwerpers in hun veelszins diepe gedachtenanalyse te willen nadenken.

Tot de laatsten mogen wij zeker wel zeggen heeft *Prins Maurits* behoord.

Weliswaar voelde hij zich in het belang van de bevrijding van zijn verdrukte volk in de eerste plaats tot de krijgsdienst geroepen. Doch ter betere uitoefening van zijn beroep heeft hij zich met grote energie en zeker ook met succes op de beoefening van de wiskunde toegelegd. Deze verdienste van Maurits wordt in „Hollands Roem" [1]) treffend aldus weergegeven:

„Maar ons mogt het gebeuren, aan het hoofd van onzen Staat eenen zoon van Vader Willem te zien, die het in onderscheidene

---

[1]) „Hollands Roem in Kunsten en Wetenschappen", door Hendrik Baron Collot D'Escury, Heer van Heinenoord; 's Gravenhage en te Amsterdam bij de gebroeders Van Cleef 1835.

takken der wiskundige wetenschappen, niet slechts berusten liet bij het overwegen van den arbeid van anderen, vóór hem verrigt, maar die ook oorspronkelijk en oordeelkundig handen aan het werk sloeg, en vruchten van eigen brein leverde, die zich niet vergenoegde met het veld der wiskundige bespiegeling, met zijne gedachten bespiegelend te overzien, maar die, wat meer is, in dat werkdadige zich voornamelijk het nuttig zijn aan vaderland en 's lands betrekkingen ten doel stelde. Ja, voorzeker was hij een groot wiskundige."

Hoezeer deze schrijver van de edele motieven van Maurits' belangstelling in wiskundige wetenschappen, alsook van zijn oorspronkelijkheid overtuigd was, moge ten overvloede nog uit het volgende blijken: „Bij al zijn wetenschappelijk bespiegelen, en het paren van ondervinding met bespiegeling, was tevens de zucht blijkbaar, om alles dienstbaar te maken aan 's lands belang, dat hij steeds voor oogen hield. Hij maakte zich wel den arbeid van anderen ten nutte, maar met oordeel en een geest van oorspronkelijkheid overdacht hij zelf, en leverde die vruchten van eigen onderzoek, welke daarvan het onloochenbaar bewijs droegen." Waar de schrijver hier op de arbeid van *anderen* doelt, is het niet twijfelachtig, wie daarmee bedoeld wordt, n.l. in de eerste plaats des Prinsen leermeester *Simon Stevin van Brugge*. Men kan zich trouwens moeilijk Maurits zonder Stevin, of Stevin zonder Maurits indenken. Die twee hoorden wetenschappelijk bij elkander, zij vulden elkaar aan. Stevin de wetenschappelijke mathematicus, Maurits de man van de toegepaste wiskunde. Stevin de theoreticus, die de wiskundige achtergrond van de problemen zag, er over filosofeerde en er met Maurits over confereerde en Maurits de uitvoerder, de man van de daad, die de theoretisch uitgewerkte denkbeelden van Stevin zeker ook poogde te doorzien en ze ook werkelijk heeft doorzien, doch tevens ze ook in practijk bracht. Een schrijver van gezag als J. P. van Capelle, [2]) handelende over Maurits en Stevin, schrijft o.a. „Weinigen kunnen beseffen, hoe veel de Vereenigde Gewesten aan den gemeenzamen omgang van deze twee waardige mannen zijn verschuldigd. Beider brein scherpte zich als het ware tegen elkander, tot voortbrenging dier vonken van

---

[2]) Joh. Pieter van Capelle „Bijdragen tot de geschiedenis der Nederlanden", Haarlem 1827, bl. 286.

genie en oordeel, die met edelen gloed, in de *schriften* van den eenen, in de *daden* van den anderen uitblinken".

Ten einde dus een inzicht te verkrijgen in de werkelijke wiskundige verdiensten van Maurits doen we daarom het beste de geschriften van Stevin zelf te bestuderen, want „bijna alles wat Stevin uit de pen is gevloeid, stond in verband tot zijnen omgang met Maurits". (J. C. van Capelle). De vruchten van hun gemeenschappelijk onderzoek gaf Stevin in 1606 te Leiden uit onder den titel *„Wisconstige gedachtenissen,* inhoudende 't ghene daer hem in gheoeffent heeft den Doorluchtigsten Hoochgeboren Vorst ende Heere Maurits, Prince van Oraengien enz."

Deze „Wisconstige Gedachtenissen" nu leveren niet alleen een duidelijk bewijs van Maurits' veelzijdige ontwikkeling op het gebied van de wis- en natuurkundige wetenschappen, doch stellen ook de diepste motieven in het licht, waarom de vorst zich zo zeer op deze wetenschappen heeft toegelegd. Een gedeelte uit de voorrede moge daarvan reeds direct bewijs afleggen:

„Nadien syn Vorstelicke Ghenade hem in de wisconsten gheoeffent hadde meer dan na de gemeene manier, uyt oirsaeck dat een meer dan ghemeene inbeelding hem dede ghelooven 't selve hem in syn beroup nut en noodich te syn, heeft benevens het deurgronden van eenighe wisconstighe stoffen uytghegheven bij ettelicke schryvers in ghedructe boucken, hem oock geoeffent in ander onghedruckte, die ick na myn styl beschreef, en als Wisconstige gedachtenissen bewaerde: Welcke syn Vorstelicke Genade int reysen met hem nemende niet sonder perikel van te meughen verloren worden, te meer dat die reysen de crychfortuynen gemeenelick onderworpen ware, soo gedenct my hem somwylen becommert gesien te hebben, vreesende dat byaldien sulck ongheval daer over quaem, ten deele te verliesen (overmidts dattet onmeugelick is alles by gedacht t' onthouden) de middel om hem te behelpen alst noot waer, mettet gene daer hy syn tyt soo vlietelick in besteedt hadde. T' welck ick overleggende, en noch daer benevens, dattet niet alleenelick en syn schriften van anderen, maer gemengt met syn eygen vonde als int volgende blycken sal; Ja sulcx dattet in dese stof voor een Vorst met soo veel sware saken becommert, niet wel geloovelick en soude schynen, ten waer ick 't synder plaets de reden verclaerde: Soo heeft my om sulck ongeval te voorcommen, de sekerste wech gedocht, dese Wisconstige gedachtenissen te doen drucken".

We komen nog uitvoerig op deze „Wisconstige gedachtenissen" terug, om dan vooral die gedeelten daarvan te belichten, waar Maurits oorspronkelijke en zelfstandige bijdragen heeft geleverd.

Vooreerst willen we uit andere literatuurbronnen nog enige bewijzen aanvoeren van Maurits' wiskundige verdienste. Niemand minder dan *Hugo de Groot,* waarvan bekend is, dat hij de wiskundige wetenschappen hoogachtte, wijdde een zijner bekendste dichtstukken, getiteld „Mathematica Principis Mauritii", aan Maurits' lofvermelding. Doch ook op een andere plaats n.l. in zijn „Vergelijking der Gemeenebesten" legt de Groot een treffend getuigenis van Maurits' wiskundige bekwaamheid af, b.v. waar hij in Deel III bl. 102: zegt „dat Maurits alle soort van geleerdheid zoodanig omvattede, dat het zelfs voor een bijzonder persoon, en die zich daar alleen mede bezig hield, genoegzaam zijn zoude, om er den top van vermaardheid door te bereiken", of waar hij op bl. 103 vraagt „wie gelijk Maurits ooit in eene zoo spitsvondige als veel omvattende wetenschap (de wiskunde) zoodanig heeft omgewoeld, dat niet te vreden met van de uitvindingen der ouden gebruik te maaken hij zelve zoo veel vorheen onbekende dingen ontdekt heeft, en bij de nakomelingschap heeft dank behaald voor datgene, wat hij van de oudheid ontving?"

Voorts wijzen we als bewijsgrond nog op het belangrijke werk van *Prof. Bosscha,* „Neêrlands Heldendaden te Land", Deel I bl. 271 en v.v., waar deze in een kort maar zakelijk tafereel schildert, hoe Maurits steeds aan practische beoefening theoretische kennis wist te paren.

Het was intussen niet alleen de geniale geest van een Simon Stevin, door welks aanraking in Maurits de zin voor de wiskundige wetenschappen ontvlamde. Maurits heeft n.l. behalve van Stevin nog de bevruchtende werking van een *Rudolf Snellius* ondergaan. Toen Maurits in 1582 door zijn vader naar de Hoogeschool van Leiden werd gezonden, genoot hij er het onderwijs van Snellius, die enige jaren te voren aldaar tot hoogleraar in de wiskundige wetenschappen was aangesteld.

Ten slotte noemen we nog enige namen van toenmalige wiskunstenaars, met wie Maurits ontegenzeggelijk in nauwe aanraking moet zijn geweest. Het waren *van Merwen,* schepen van de stad Leiden en *Ludolph van Ceulen,* bekend door zijn werk over cirkelquadratuur en het getal π, die op uitdrukkelijk verlangen van

Maurits gemachtigd werden aan de Hoogeschool te Leiden onderwijs te geven in „Tel- en Meetkunst" ten behoeve van a.s. (leger)-ingenieurs. Voorts is bekend, dat Adriaan Antonieszoon, bijgenaamd *Metius* bij Maurits in hoge eer stond. Deze wiskunstenaar (hij benaderde het getal π) was president-schepen van Alkmaar, toen deze stad door de Spanjaarden in 1573 belegerd werd, welke belegering faalde door zijn grote kunde als ingenieur. Van Adr. Ant. Metius is o.a. nog bekend, dat hij later onder de titel van „Sterkte-bouwmeester der Vereenigde Nederlanden" de ontwerpen gemaakt heeft van de meeste sterkten, in zijn tijd aangelegd, o.a. van de Schenkenschans (1586) en die van Bourtange (1593) e.a.

Ten slotte noemen we nog de naam van zijn zoon nl. *Jacob Adriaansz. Metius,* die om verschillende redenen nl. zowel als medeuitvinder van de verrekijker, alsook om zijn kunde als sterktebouwer, evenals zijn vader door Maurits met onderscheiding werd behandeld.

Het pleit zeker ook voor het practische wiskunde vernuft van Maurits, dat hij zodra de verrekijkers hier te lande door twee [3]) verschillende personen waren uitgevonden, hij terstond de verschillende samenstellingen onderzocht en met elkaar vergeleek, ten einde daarvan met voordeel gebruik te maken in de krijgsdienst.

Uit het voorgaande moge voldoende duidelijk zijn geworden, dat Maurits meer dan gewone belangstelling had voor de wiskundige wetenschappen. Dit feit houdt impliciet zeker ook reeds in de meer dan gewone kennis, die Maurits van de stof had. Toch zou men hieruit niet zonder meer zijn begaafdheid voor de wiskunde mogen opmaken. We stellen ons daarom voor in een tweede artikel, gewijd aan de bespreking van de „Wisconstighe gedachtenissen" meer speciaal aan te geven met welke mathematische problemen Maurits zich werkelijk heeft bezig gehouden en welke originele vondsten hij heeft gedaan.

Hier volge nog een schema van de „Wisconstighe Gedachtenissen in Hoofdstukken en verdere onderdelen, uit welk overzicht reeds aanstonds blijkt de veelvoudige onderscheidenheid van wiskundige materie, waarmee Stevin en Maurits zich hebben beziggehouden.

---

[3]) n.l. behalve door Jacob Adriaansz. Metius te Alkmaar ook door Hans Lipperhey te Middelburg. Ook wordt de naam van Zacharias Jansen, brillemaker te Middelburg als uitvinden genoemd, doch zijn aanspraken op het uitvinderschap worden sterk betwijfeld. Zie Newcomb Engelmann „Populaire Astronomie", Sechste Auflage, 1921 bl 105. Ook op deze plaats wordt melding gemaakt van Maurits' belangstelling voor de verrekijker.

WISCONSTIGHE GHEDACHTENISSEN.

Ie STUK VAN 'T WEERELTSCHRIFT

- *1ste Deel* van den *Driehouckhandel* . . . . .
  - 1ste boek: van het maecsel der tafels der Houckmaten.
  - 2de boek: van de platte driehoucken.
  - 3de boek: van de Clootsche driehoucken.
  - 4de boek: van de Hemelclootsche werckstucken deur rekeninghen der Clootsche △△ gewrocht.
- *2de Deel* van 't *Eertclootschrift* . . . .
  - 1ste boek: van des Eertcl. schrifts bepalinghen in 't ghemeen.
  - 2de boek: van Sijn Stofroersel.
  - 3de boek: van de Damphooghde.
  - 4de boek: van de Zeylstreken.
  - 5de boek: van de Havenvinding.
  - 6de boek: Spiegheling van Ebbenvloet.
- *3de Deel* van *den Hemelloop* . . . .
  - 1ste boek: van de vinding der dwaelderloopen en der vaste sterren deur ervaringsdachtafels.
  - 2de boek: van de vinding der dwaelderloopen deur wisc. werckingen met behulp van eerste oneventheden.
  - 3de boek: van de tweede oneventhede, Copernicus.

IIe STUK: VAN DE MEETDAET

- *1ste Boek:* van het *teyckenen* der grootheden . .
  - 1e Deel: van het teyckenen der liniën.
  - 2e Deel: „ „ „ „ vlacken.
  - 3e Deel: „ „ „ „ lichamen.
- *2de Boek:* van het *meten* der grootheden . . . .
  - 1e Deel: „ „ meten „ liniën.
  - 2e Deel: „ „ „ „ vlacken.
  - 3e Deel: „ „ „ „ lichamen.
- *3de Boek:* van de *vier afcomsten* als vergaering, aftrecking, menighvulding en deeling
  - 1 Deel: der liniën.
  - 2 Deel: der vlacken

heden . . . . 3 Deel: der lichamen.

5de Boek: van de *Evenredelicke Snijding der* Grootheden . . . .
- 1 Deel: der liniën.
- 2 Deel: der vlacken.
- 3 Deel: der lichamen.

6de Boek: van 't *verkeeren der Grootheden* in *ander vormen* . . . .
- 1 Deel: der liniën.
- 2 Deel: der vlacken.
- 3 Deel: der lichamen.

IIIe STUK: VAN DE DEURSICHTIGHE

1ste Boek: van de verschauwing.

2de Boek: van de Beginselen der *Spieghelschauwen.*

IVe STUK: VAN DE WEEGHCONST

1ste Boek: van de *beginselen* der *weeghconst.*

2de Boek: van de *vinding der swaerheyts middelpunten* . . . .
- van de platte.
- van de lichamen.

3de Boek: van de *weeghdaet.*

4de Boek: van de *beginselen* des *waterwichts.*

5de Boek: van den *Anvangh* der *waterwichtdaet.*

BYVOUGH *1e Deel* van het *tauwicht.*
2e Deel van het *catrolwicht.*
3e Deel van de *vlietende topswaerheyt.*
4e Deel van de *Toomprang.*

Ve STUK VAN DE GEMENGDE STOFFEN

1e Deel van *de Telconstighe Anteyckeninghen.*

2e Deel van *de Vorstelicke Bouckhouding* . . . .
- Coopmans bouckhouding op Italiaensche wyse.
- Vorstelicke " " " "
- Bouckhouding in domeine " " "
- Journael in domeine " " "
- Schutbouck in domeine " " "
- enz.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van de firma Noordhoff, Groningen-Batavia:

C. J. ALDERS, *Algebra voor M. O. en V. H. O.* I. 123 blz. 12 fig. gec. . . . . *f* 1,50

M. G. H. BIRKENHÄGER en H. J. D. MACHIELSEN, *Meetkundige vraagstukken voor scholen met beperkt wiskunde-programma.* 143 blz. 8 fig. gec. . . . . - 1,50

Dr. H. J. E. BETH, *Beknopt leerboek der cosmographie.* 3e **druk.** 32 fig. . . . . - 0,90

Prof. Dr. C. H. VAN OS, *Inleiding tot de functietheorie.* 245 blz. 24 fig. *f* 4,90 . . . . geb. - 5,75
I n h o u d : I. Het rekenen met complexe getallen. II. De eenvoudigste functies. III. Differentiaalrekening. IV. Integraalrekening. V. Oneindig voortlopende reeksen. VI. Oppervlakken van Riemann.

Prof. Dr. J. G. RUTGERS, *Leerboek der beschrijvende meetkunde.* Deel I, 3e stuk. Doorsnijding van kegels. Cylinders en bollen. Omwentelingsopp. Ontwikkelbare en scheve regelvlakken met vlakke doorsneden en schaduwen. Onderlinge doorsnijdingen met scheve kegels en cylinders. 123 fig. en 75 werkstukken . . . . . . - 2,75

Prof. Dr. M. J. VAN UVEN, *Mathematical treatment of the results of agricultural and other experiments.* 310 pages . . . . geb. - 10,50

P. WIJDENES. *Algebraische Vraagstukken II,* **7e druk.** 192 blz. 20 fig. . . . . geb. - 3,25
Examenopgaven tot en met 1935.

P. WIJDENES, *Algebra voor M.U.L.O. II B.* **11e druk.** Examenuitgave. 239 blz. . . . . geb. - 2,25
Examenopgaven tot en met 1935.

P. WIJDENES, *Grafiekenschrift bij Nieuwe Schoolalgebra II en III en Algebraische Vraagstukken II.* **6e druk** . . - 0,50

P. WIJDENES, *Lagere Algebra II.* **3e druk.** 483 blz. 153 fig. geb. - 8,50
Voor int. op Noordhoffs Wiskundige tijdschriften tijdel. - 6,50

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE, *Rekenboek voor de H B.S. I.* **16e druk** . . . . gec. - 1,70

HET PARALLELOGRAM

DOOR

P. BRONKHORST.

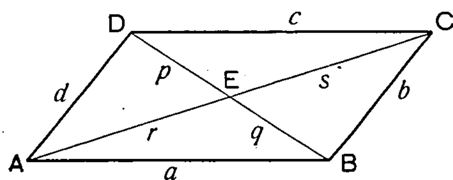


Fig. 1.

Schrijven we van 8 belangrijke eigenschappen van een parallelogram, de combinaties 2 aan 2 op, dan krijgen we een aantal interessante gevallen, die misschien niet algemeen bekend zijn.

(1) AB // DC
(2) AD // BC
(3) ∠ DAB = ∠ BCD
(4) ∠ ABC = ∠ ADC
(5) $a = c$
(6) $b = d$
(7) $p = q$
(8) $r = s$

Van de $C^2_8 = 28$ combinaties zijn er 11 niet triviaal. Hiervan blijken er 7 weer tot het parallelogram terug te voeren (één met een aardig bewijs) en 4 tot ook andere figuren.

Een vierhoek, waarvoor (1; 3) geldt, is een parallelogram. Zo ook bij (1; 5) (3; 4) (5; 6) (7; 8) (1; 7). Deze vinden we als stelling of als vraagstuk in alle leerboeken.

(3; 7) leidt ook tot een parallelogram. Het bewijs kan in de 1e klas aldus: Stel △ ABD getekend, met de zwaartelijn AE; dan moet C op AE of op het verlengde van AE liggen. Is dan EC < AE dan is ∠ DCB > ∠ DAB enz.

Het aardigst zijn de gevallen, waarbij ook andere figuren dan een parallelogram aan de voorwaarden voldoen. In bijna al deze gevallen kunnen we niet bewijzen, dat de figuur een parallelogram is, doordat we de gelijksoortigheid van hoeken niet kunnen aantonen. (Een nuttige oefening!)

Het eenvoudigst is wel (1; 6) (gelijkbenig trapezium). Dan

(3; 8); (vlieger). Hier is wel congruentie van de twee driehoeken, echter sluiten ze op twee verschillende wijzen aan. Het bewijs van de congruentie kan waarschijnlijk niet met 1e klassestof.

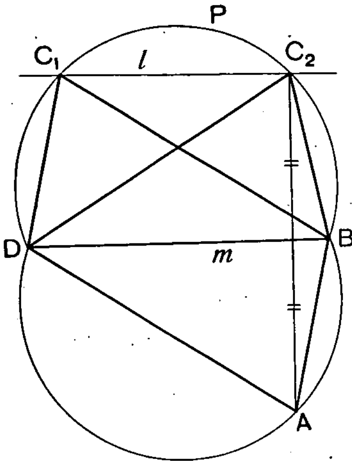


Fig. 2. De verbinding (3; 8).

Toch is dit voor de 3e klasse een aardig probleem.

Stel △ ABD getekend; we krijgen dan 2 meetkundige plaatsen voor C, nl. de cirkelboog DPB op koorde DB en lijn l, die ontstaat, als we lijn m t.o.v. A met 2 vermenigvuldigen.

We krijgen dan het parallelogram ABC_1D en de vlieger ABC_2D.

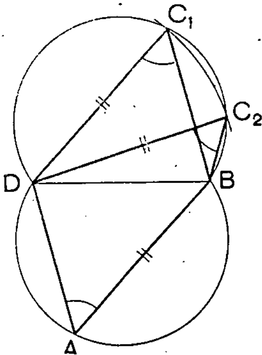


Fig. 3. De verbinding (3; 5).

We kunnen hier natuurlijk ook krijgen:

$$\angle CBD + \angle ADB = 180°.$$

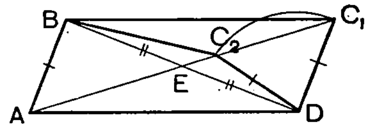


Fig. 4. De verbinding (5; 7).

De leerlingen vinden de meeste gevallen, waar 't *niet* „opgaat" (op zich zelf ook een verademing!) met groot plezier. Alleen (3; 5) lukt meestal niet.[1]) Natuurlijk kan men met de leerlingen *alle* 28 combinaties doornemen, waarbij dan de identiteit van bv. (3; 7) met (4; 8); (1; 6) met (2; 5); enz. blijkt.

[1]) Terecht behandelt *Wijdenes* dit geval op blz. 51 van zijn Meetkundige vraagstukken; een onderzoek in die trant is zeer instruciief.

1. VOORTBRENGING EN ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN DER KEGELSNEDEN.

De wijze, waarop de kegelsneden in de Grieksche wiskunde worden ingevoerd en behandeld, wijkt, ondanks dieperliggende punten van overeenstemming, uiterlijk zoozeer af van hare voortbrenging en bestudeering in onzen tijd, dat het gewenscht lijkt, om aan de uiteenzetting van de elementen, waarop Archimedes voortbouwt, een korte schets van de ontwikkeling der theorie dezer krommen vanaf den tijd van hare vermoedelijke eerste opstelling tot aan hare volkomen ontplooiïng in de *Conica* van Apollonios te doen voorafgaan.

1,0. Als ontdekker der kegelsneden geldt de wiskundige Menaichmos, die o.a. in den *Catalogus Geometrarum* van Proklos [1]) vermeld wordt om zijn aandeel in de ontwikkeling der geometrie na Eudoxos en die dus ca. 350 v. Chr. moet hebben geleefd. De grond, waarop hem de verdienste van een zoo belangrijke ontdekking wordt toegekend, is vrij vaag: in een bij Eutokios [2]) bewaard gebleven verhandeling, die gesteld is in den vorm van een brief van den wiskundige Eratosthenes aan koning Ptolemaios van Egypte ter begeleiding van een nieuwe oplossing van het probleem der twee middenevenredigen, wordt namelijk in een overzicht van oudere oplossingen gezegd, dat men niet den kegel moet snijden volgens de triaden van Menaichmos [3]). Daar nu verder Eutokios aan Menaichmos een constructie der twee middenevenredigen toeschrijft [4]), waarbij van een parabool en een orthogonale hyperbool gebruik wordt gemaakt, beschouwt men gewoonlijk de passage in den brief van Eratosthenes als een aanwijzing, dat Menaichmos de ontdekker der kegelsneden zou zijn geweest. De nadere bijzonderheden van deze vondst blijven daarbij natuurlijk geheel in het duister. We weten door Eutokios alleen, dat Menaichmos het probleem van de constructie van twee lijnstukken B, Γ, die met twee gegeven lijnstukken A, Δ aan de betrekkingen

$$(A,\ B) = (B,\ \Gamma) = (\Gamma,\ \Delta)$$

---

1) *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii.* ed. G. Friedlein (Leipzig 1873) p. 67.

2) *Opera* III, 96.

3) *Opera* III, 96; l. 17. μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας.

4) *Opera* III, 78.

voldoen, oploste door de relaties

$\mathbf{T}(B) = \mathbf{O}(A, \Gamma) \quad \mathbf{O}(B, \Gamma) = \mathbf{O}(A, \Delta) \quad \mathbf{T}(\Gamma) = \mathbf{O}(B, \Delta)$

waarin B en Γ als veranderlijken worden beschouwd, meetkundig te interpreteeren opv. als parabool, orthogonale hyperbool en parabool (om de latere namen even te anticipeeren) en dat hij nu de twee onbekenden B en Γ bepaalde als coördinaten van een snijpunt van twee dezer krommen. Natuurlijk rijzen hierbij nu talrijke vragen: ten eerste al deze, hoe hij nu inzag, dat de aldus planimetrisch gedefinieerde krommen ook vlakke doorsneden van een kegel kunnen zijn; vervolgens, of hij ook de andere kegelsneden eerst planimetrisch bepaalde, voordat hij ze stereometrisch voortbracht; ook, of zijn vondst misschien hierin bestond, dat hij ontdekte, dat de reeds als sneden van een kegel bekende krommen dienstbaar konden worden gemaakt aan de oplossing van het probleem der twee middenevenredigen; op al deze vragen is echter bij den tegenwoordigen stand van onze kennis der Grieksche wiskunde het antwoord niet te geven.

1,1. Hoe dit zij, uit het feit, dat reeds omstreeks 300 v. Chr. de bovenvermelde speciale werken over kegelsneden van Aristaios en Euclides konden ontstaan, blijkt wel, dat de theorie dezer krommen in de tweede helft der vierde eeuw intens moet zijn beoefend. Over het fundament der nieuwe leer, de wijze van voortbrenging der kegelsneden, weten we iets door onderling overeenstemmende uitlatingen van Pappos[1]) en Eutokios[2]) (welke laatste zich op Geminos beroept). Eutokios vertelt, dat „de ouden" onder kegels uitsluitend de lichamen verstonden, die door wenteling van een rechthoekigen driehoek om een rechthoekszijde ontstaan (rechte cirkelkegels dus), dat ze deze naar de soort van den tophoek der volledige meridiaandoorsnede in rechthoekige, stomphoekige en scherphoekige kegels indeelden en dat zij elke soort slechts tot voortbrenging van één type der kegelsneden gebruikten. Zij sneden namelijk elken kegel met een vlak, loodrecht op een beschrijvende rechte en noemden de verkregen krommen met de namen (die volgens Pappos van Aristaios afkomstig zouden zijn):

snede van den rechthoekigen kegel (*ὀρθογωνίου κώνου τομή*, verder aan te duiden als *orthotome*).

---

[1]) Pappos, *Collectio* VII, 30; 672.
[2]) Apollonius, *Conica* II, 168.

snede van den stomphoekigen kegel (ἀμβλυγωνίου κώνου τομή, verder aan te duiden als *amblytome*).

snede van den scherphoekigen kegel (ὀξυγωνίου κώνου τομή, verder aan te duiden als *oxytome*).

Het is duidelijk, dat dit de krommen zijn, die sedert Apollonios opv. als parabool, hyperbool en ellips bekend staan.

Voor de wijze, waarop nu uit deze definities voor elk der krommen een symptoom (σύμπτωμα, d.w.z. een kenmerkende relatie tusschen de coördinaten van ieder punt der kromme, die, in de symboliek der algebra vertaald, overgaat in de vergelijking ten opzichte van het gebruikte coördinatenstelsel) is afgeleid, zijn geen authentieke bronnen beschikbaar. Het is echter in verband met de symptomata, die vóór Apollonios ter karakteriseering voornamelijk worden gebruikt, wel zeer aannemelijk, dat dit als volgt in het werk is gegaan.

Laat in de volgende figuren het meridiaanvlak door de beschrijvende, waarop het snijvlak loodrecht staat, als vlak van teekening zijn gekozen; het snijvlak wordt nu voorgesteld door *AB*. Een vlak loodrecht op de kegelas snijdt het vlak van teekening volgens $\Gamma\Delta$, het snijvlak volgens $K\,\Theta$, loodrecht op het vlak van teekening. *K* is nu een punt van de kromme.

Orthotome.

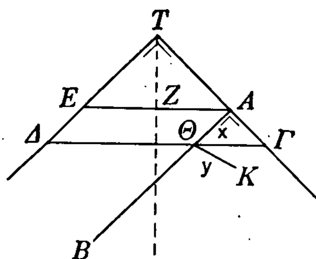


Fig 1.

Nu is $\quad \mathrm{T}\,(K\Theta) = \mathrm{O}\,(\Gamma\Theta,\ \Delta\Theta)$

$= \mathrm{O}\,(\Gamma\Theta,\ 2AZ)$

$\Delta\ \Gamma\Theta A \sim \Delta\ TAZ$ dus

$(\Gamma\Theta,\ \Theta A) = (TA,\ AZ)$ dus

symptoom: $\mathrm{T}\,(K\Theta) = \mathrm{O}\,(2\,TA,\ A\Theta)$.

In algebraïsche symboliek:

$$(K\Theta = y. \quad A\Theta = x. \quad 2\,TA = p)$$

beduidt dit de vergelijking: $y^2 = px$.

Amblytome en Oxytome.

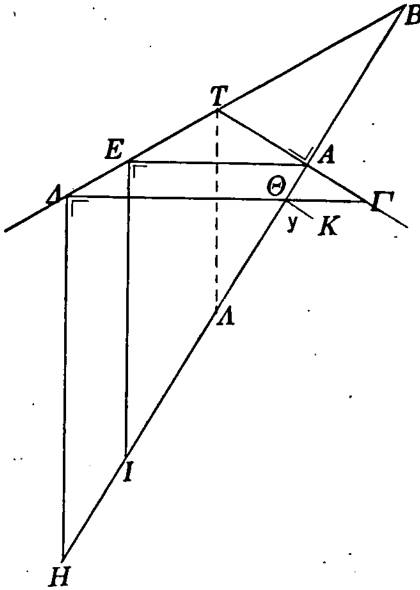


Fig 2.

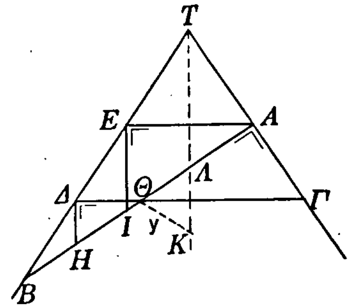


Fig 3.

$$\mathbf{T}\,(K\Theta) = \mathbf{O}\,(\Gamma\Theta,\ \Delta\Theta)$$
$$= \mathbf{O}\,(A\Theta,\ H\Theta)$$
$$(H\Theta,\ IA) = (\Delta\Theta,\ EA) = (B\Theta,\ BA)$$

dus
$$(H\Theta,\ B\Theta) = (IA,\ BA).$$

Hieruit volgt

$$[\mathbf{O}\,(A\Theta,\ H\Theta),\ \mathbf{O}\,(A\Theta,\ B\Theta)] = (IA,\ BA) = (2A\Lambda,\ BA)$$

of

symptoom: $[\mathbf{T}\,(K\Theta),\ \mathbf{O}\,(A\Theta,\ B\Theta)] = (2A\Lambda,\ AB)$

In algebraïsche symboliek

$(K\Theta = y,\ A\Theta = x_1,\ B\Theta = x_2,\ 2A\Lambda = p,\ AB = a)$

vergelijking: $$\frac{y^2}{x_1 x_2} = \frac{p}{a}.$$

We zullen dezen vorm van de vergelijking der snede aanduiden als twee-abscissen-vorm.

1,2. Ter vergelijking vermelden we nu de wijze, waarop ruim een eeuw later de kegelsneden door Apollonios worden behandeld; ze blijken nu te worden voortgebracht op een scheeven cirkelkegel, die gesneden wordt door snijvlakken van verschillende ligging.

Laat in de volgende figuren $T\Gamma\Delta$ dat vlak door de kegelas TM[1]) voorstellen, waarvan de doorsnede $\Gamma\Delta$ met de kegelbasis (het vlak van den cirkel M) loodrecht staat op de rechte EZ, volgens welke het aangebrachte snijvlak de basis snijdt. De driehoek $T\Gamma\Delta$ moge de asdriehoek heeten. Het snijvlak snijdt het vlak $T\Gamma\Delta$ volgens AH. AH is dan een lijn van scheeve symmetrie voor de richting EZ[2]). Men heeft nu drie gevallen:

α) AH is parallel aan een zijde van den asdriehoek (fig. 4).

β) AH snijdt een zijde van den asdriehoek en van de andere het verlengde door T[3]) (fig. 5).

γ) AB snijdt de beide zijden van den asdriehoek[4]) (fig. 6).

Een willekeurig vlak parallel aan de basis snijdt den kegel volgens een cirkel met diameter $P\Pi$ en het snijvlak volgens $K\Theta$. K ligt op den kegelmantel en is dus een punt van de doorsnede. In elk der drie gevallen geldt nu voor de ordinaat $K\Theta$[5]) de betrekking:

$$\mathbf{T}\,(K\Theta) = \mathbf{O}\,(\Pi\Theta,\ P\Theta).$$

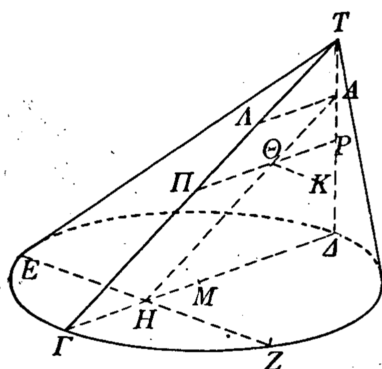


Fig 4.

Zij nu in fig. 4
$A\Lambda \,//\, \Delta\Gamma$, dus $\Pi\Theta = \Lambda A$.
Nu is

$$(\Lambda A,\ TA) = (\Gamma\Delta,\ T\Delta)$$
$$(P\Theta,\ A\Theta) = (\Delta\Gamma,\ T\Gamma)$$

dus

$$[\mathbf{O}(\Pi\Theta,\ P\Theta),\ \mathbf{O}(TA,\ A\Theta)] = [\mathbf{T}(\Gamma\Delta),\ \mathbf{O}(T\Delta,\ T\Gamma)].$$

Bepaal nu een lijnstuk N, zoodat

$$(N,\ TA) = [T(\Gamma\Delta),\ \mathbf{O}(T\Delta,\ T\Gamma)]$$

dan is

---

1) Kegelas is de rechte door den top en het centrum van de basis.

2) Deze symmetrie is dan en slechts dan rechte symmetrie, wanneer $EZ \perp AH$, dus $EZ \perp T\Gamma\Delta$, dus wanneer $T\Gamma\Delta$ het vlak door de as loodrecht op het grondvlak is.

3) Apollonios beschouwt als eerste ook het deel van den kegelmantel, dat ontstaat, door de bij Archimedes beschouwde halve beschrijvenden door T te verlengen. Hij komt zoo tot twee hyperbooltakken.

4) Daar de kegelmantel gedacht wordt zich onbegrensd uit te strekken, kan de basis steeds zoo worden aangenomen, dat dit het geval is.

5) Door dezen ook bij de behandeling van Archimedes te gebruiken term geven we de staande Apollonische uitdrukking τεταγμένως κατηγμένη, *ordinatim ducta,* d.w.z. in toegevoegde richting getrokken, weer, die ook Archimedes reeds eenmaal bezigt.

$$[\mathbf{T}(K\Theta),\ \mathbf{O}(TA,\ A\Theta)] = (N,\ TA) = [\mathbf{O}(N,\ A\Theta),\ \mathbf{O}(TA,\ A\Theta)]$$

dus symptoom: $\mathbf{T}(K\Theta) = \mathbf{O}(N,\ A\Theta)$.

Het vierkant op $K\Theta$, parabolisch aangepast (0,21) aan N, geeft dus een rechthoek met zijde $A\Theta$.

In algebraische symboliek:

$$(K\Theta = y\ .\ A\Theta = x\ .\ N = p)$$

$$y^2 = px$$

(vergelijking t.o.v. het *scheeve* stelsel met X as AH, oorsprong A, ordinaatrichting EZ).

Wegens den samenhang van de aldus af te leiden symptomen met de verschillende vormen van aanpassing van oppervlakken worden de krommen nu door Apollonios opv. parabool, hyperbool en ellips genoemd[1]).

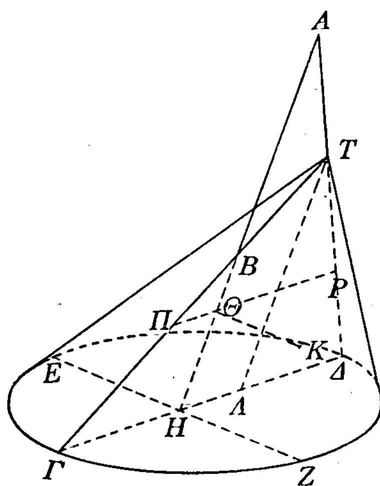


Fig 5.

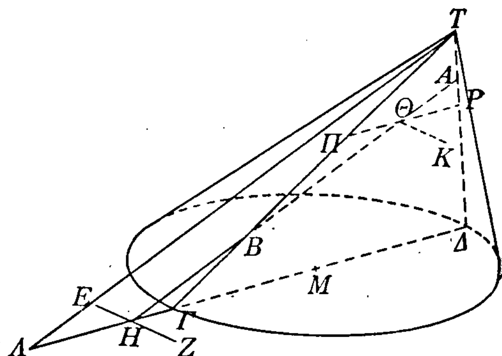


Fig 6.

Zij verder in de fig. 5 en 6: $T\Lambda \,//\, AB$ (Λ op $\Gamma\Delta$).

Nu is

$$(\Pi\Theta,\ B\Theta) = (\Gamma\Lambda,\ T\Lambda)$$

$$(P\Theta,\ A\Theta) = (\Delta\Lambda,\ T\Lambda)$$

dus

$$[\mathbf{O}(\Pi\Theta,\ P\Theta),\ \mathbf{O}(B\Theta,\ A\Theta)] = [\mathbf{O}(\Gamma\Lambda,\ \Delta\Lambda),\ \mathbf{T}(T\Lambda)].$$

---

[1]) Dat deze namen door Apollonios werkelijk nieuw zijn ingevoerd, blijkt uit de proposities *Conica* I, 11—13, die telkens eindigen met *καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτα τομὴ παραβολή, ὑπερβολή, ἔλλειψις.*

PROSPECTUS

INLEIDING TOT DE FUNCTIETHEORIE

DOOR

DR. C. H. VAN OS
Hoogleraar aan de Technische Hogeschool
te Delft



Prijs van het complete boek, groot, 253 pagina's *f* 4.90, geb. *f* 5.75

P. NOORDHOFF N.V. - 1935 - GRONINGEN-BATAVIA

Verkrijgbaar in de boekhandel.
In Ned. Oost-Indië uit voorraad verkrijgbaar bij
N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF,
Laan Holle 7, Batavia C.

VOORWOORD.

Dit leerboek is bestemd voor de Delftse studenten die een examen in Functietheorie moeten afleggen. Wellicht zal het ook voor studenten aan de Universiteiten van enig nut kunnen zijn als inleiding in dit deel der wiskunde. Hier en daar heb ik ook gedacht aan leraren, die hun inzicht in het rekenen met complexe getallen nog eens zouden willen opfrissen.

Dat ik van bestaande leerboeken een dankbaar gebruik gemaakt heb, spreekt wel vanzelf. In het bijzonder noem ik de „Cours d'Analyse" van Goursat en de „Modern Analysis" van Whittaker en Watson. Bij de uiteenzettingen aan het begin heb ik mij in hoofdzaak aangesloten bij het werk „Het Getalbegrip" van Prof. Dr. F. Schuh.

Verder spreek ik mijn dank uit aan de firma P. Noordhoff voor de uitnodiging tot het schrijven van dit boek en voor de wijze, waarop aan mijn wensen tegemoet is gekomen; en aan den heer Ir. J. Bloemsma, assistent aan de Technische Hogeschool, voor het maken der tekeningen.

Ch. H. van Os.

INHOUD.

—

In de tweede plaats beschouwen wij het geval, dat $z = -1$, $n = 2$. Wij hebben dan, als wij voor $\theta = \arg. z$ de waarde π nemen:

$$w = \sqrt{-1} = 1 . \left(\cos \frac{\pi + 2mx}{2} + i \sin \frac{\pi + 2m\pi}{2}\right).$$

Door aan m achtereenvolgens de waarden 0 en 1 te geven, vinden wij voor w resp. $+ i$ en $- i$. Wij zien dus, dat het onjuist is, zoals in sommige leerboeken der algebra geschiedt, het getal i te *definiëren* door de vergelijking $i = \sqrt{-1}$, daar ook het getal $- i$ door het symbool $\sqrt{-1}$ kan worden aangeduid.

Door het symbool $\sqrt[n]{z}$ worden dus in het algemeen n getallen aangeduid. De vraag rijst, of het ook voor niet-positieve waarden van z mogelijk is, om, evenals wij dit zoeven voor positieve waarden gedaan hebben, één der n getallen uit te kiezen om in het bijzonder door het symbool $\sqrt[n]{z}$ aangeduid te worden. Wij zullen op deze vraag in het volgende hoofdstuk terugkomen en dan zien, dat een eenvoudige afspraak, die voor *alle* waarden van z tot een bepaald resultaat leidt, niet mogelijk is. Voorlopig doen wij daarom het beste, de verschillende waarden van $\sqrt[n]{z}$ op dezelfde voet te behandelen.

Deze meerwaardigheid van $\sqrt[n]{z}$ heeft tengevolge, dat verschillende formules, die uit de algebra der reëele getallen bekend zijn, thans slechts met voorzichtigheid kunnen worden toegepast. Wij zullen dit aan enkele voorbeelden toelichten.

In de eerste plaats beschouwen wij de formule:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Nemen wij hierin $a = z = - 1$, dan vinden wij:

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{+1}.$$

Zoals wij zoeven zagen, heeft $\sqrt{-1}$ de beide waarden $+ i$ en $- i$. Vullen wij voor elk der beide factoren in het linkerlid elk dezer waarden in, dan vinden wij voor het product de beide waarden $+ 1$ en $- 1$. Zal de formule dus gelden, dan moeten wij in dit geval aan $\sqrt{+1}$ elk der beide waarden $+ 1$ en $- 1$ toekennen, dus afwijken van de algemene afspraak omtrent de wortels uit een positief getal.

In de tweede plaats beschouwen wij de formule:

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}.$$

Is α niet positief, dan heeft het linkerlid dezer vergelijking 4 verschillende waarden, het rechterlid daarentegen slechts 2. Stellen wij $\sqrt{\alpha} = w$, dan is $w^2 = \alpha$, dus $w^4 = \alpha^2$. Uit deze laatste vergelijking volgt, dat wij het getal w door het symbool $\sqrt[4]{\alpha^2}$ kunnen voorstellen. De beide waarden van het rechterlid $\sqrt{\alpha}$ zijn dus ook waarden van het linkerlid $\sqrt[4]{\alpha^2}$; daarnaast heeft dit linkerlid echter nog twee waarden, die niet door $\sqrt{\alpha}$ kunnen worden voorgesteld. Gemakkelijk ziet men, dat men deze krijgt, door de beide waarden van $\sqrt{\alpha}$ met i te vermenigvuldigen.

In de derde plaats beschouwen wij de formule:

$$\sqrt[4]{\alpha^2} = \sqrt[6]{\alpha^3}.$$

Is α niet positief, dan heeft het linkerlid dezer vergelijking 4 verschillende waarden, het rechterlid 6. Zij:

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Wij hebben dan:

$$\sqrt[4]{\alpha^2} = \sqrt{r}\,.\left\{\cos\left(\frac{2\theta + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\theta + 2k\pi}{4}\right)\right\}.$$

$$\sqrt[6]{\alpha^3} = \sqrt{r}\,.\left\{\cos\left(\frac{3\theta + 2k'\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{3\theta + 2k'\pi}{6}\right)\right\}.$$

Deze beide getallen zijn aan elkander gelijk voor $k = 0$, $k' = 0$ en voor $k = 2$, $k' = 3$. Voor alle andere stellen waarden van k en k' zijn de beide getallen *niet* aan elkander gelijk. Er zijn dus slechts 2 waarden van het linkerlid der beschouwde vergelijking, die elk aan een waarde van het rechterlid gelijk zijn.

Evenals dit in de algebra der reëele getallen gewoonte is, zullen wij ook hier *negatieve en gebroken exponenten* invoeren. Wij stellen m.a.w.:

$$\frac{1}{z} = z^{-1}, \quad \sqrt{z} = z^{1/2}, \quad \sqrt[4]{z^3} = z^{3/4}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{z}} = z^{-1/3}, \text{ e.d.}$$

Het rekenen met negatieve gehele exponenten levert geen enkele moeilijkheid op. Daarentegen moet het rekenen met gebroken exponenten met omzichtigheid geschieden. Uit het voorafgaande volgt nl., dat niet altijd $z^{2/4} = z^{1/2}$ of $z^{2/4} = z^{3/6}$.

kwadrant aannemen. Laten z_0 en $z_0 + \Delta z$ de bijbehorende waarden zijn van het complexe getal z. Zij de scherpe $\angle\, XOP = \varphi_0$, de scherpe $\angle\, POQ = \Delta\varphi$. Wij hebben dan:

$$\text{arg. } z_0 = \varphi 0 = 2k\pi, \text{ arg. } (z_0 + \Delta z) = \varphi_0 + \Delta\varphi + 2k'\pi \quad . \quad (17).$$

Wij laten het punt Q thans naderen tot het punt P. In de formules (17) naderen dan Δz en $\Delta\varphi$ tot O. Houden wij hierbij k' constant, dan is het duidelijk, dat de bijbehorende waarde van arg. $(z_0 + \Delta z)$ nadert tot een bepaalde waarde van arg. z_0, en wel tot die, welke men vindt, door $k = k'$ te nemen. De waarde van arg. $(z_0 + \Delta z)$, die men vindt, door telkens $k' = 2$ te nemen, nadert bijv. tot de waarde van arg. z_0, die men vindt, door $k = 2$ te nemen.

Laten w_0 en $w_0 + \Delta w$ de waarden zijn van $\sqrt{z}$. die behoren bij de waarden z_0 en $z_0 + \Delta z$ van z. Wij hebben dan:

$$\text{arg. } w_0 = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{2}, \quad \text{arg. } (w_0 + \Delta w) = \frac{\varphi_0 + \Delta\varphi + 2k'\pi}{2} \quad (18).$$

Nadert nu weer Q tot P, dan ziet men hieruit gemakkelijk, dat de waarde van $(w_0 + \Delta w)$, die door een bepaalde constante waarde van k' gekarakteriseerd wordt, nadert tot de waarde van w_0, die gekarakteriseerd wordt door de waarde van k, die gelijk is aan de genoemde waarde van k'. En dit geldt voor elke waarde van k', dus voor elk der beide waarden van $(w_0 + \Delta w)$.

Indien dus twee punten z dicht bij elkander liggen, en men in elk dezer punten de beide waarden van $\sqrt{z}$ *berekent, zal elk der beide waarden in het ene punt zeer weinig verschillen van een dër waarden in het andere punt, met dien verstande, dat het genoemde verschil tot 0 nadert, als men de beide punten tot elkaar laat naderen.* Wij zullen twee waarden, die een meerwaardige functie in naburige punten z aanneemt, *aaneensluitend* noemen, indien hun verschil tot 0 nadert, als men de beide waarden van z tot elkaar doet naderen.

Indien nu w een meerwaardige functie van z is, en wij de verandering van w bij verandering van z willen bestuderen, zullen wij steeds als volgt te werk gaan. Wij beginnen met bij de aanvangswaarde van z een zekere waarde van w uit te kiezen. Vervolgens vatten wij bij elke aangroeiïng van z die waarde van w in het oog, die bij de laatstbeschouwde waarde van w aansluit, en gaan zo door. Daarbij moet men natuurlijk elke afzonderlijke aangroeiïng van z zo klein nemen, dat ondubbelzinnig vaststaat, welke waarden van w bij elkander aansluiten.

In de praktijk is het in den regel gemakkelijk uit te maken, welke waarden van een meerwaardige functie bij elkander aansluiten. Zij bijv. weer $w = \sqrt{z}$, en schrijven wij de tweede der formules (2) nog eens over:

$$\arg. w = \frac{\arg. z + 2k\pi}{2}, \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

dan zien wij gemakkelijk, dat men aaneensluitende waarden van $\sqrt{z}$ krijgt, door arg. z met kleine bedragen te laten toenemen, en daarbij k constant te houden.

Wij zullen het zoeven ontwikkelde programma nu voor de functie $\sqrt{z}$ in een paar gevallen ten uitvoer brengen.

Zij A een punt van het z-vlak, dat wij, om een bepaald geval voor ogen te hebben, in het eerste kwadrant zullen aannemen (zie fig. 10), en zij de scherpe $\angle XOA = \psi$. Laten w_1 en w_2 de beide waarden zijn, die de functie $\sqrt{z}$ in het punt A aanneemt; zij verder $OA = r$. Wij hebben dan:

$$\left.\begin{array}{ll} |w_1| = \sqrt{r}, & \arg. w_1 = \dfrac{\psi}{2} \\ |w_2| = \sqrt{r}, & \arg. w_2 = \dfrac{\psi + 2\pi}{2} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (20).$$

Wij laten thans het punt z, van A uitgaande, een cirkel beschrijven, die O tot middelpunt en r tot straal heeft, en vatten bij elke nieuwe stap die waarde van $w = \sqrt{z}$ in het oog, die bij de laatstgevonden waarde aansluit. Als aanvangswaarde van w kiezen wij daarbij de waarde w_1. In de formule (19) moeten wij dan $k = 0$ stellen en arg. z, uitgaande van de waarde ψ, geleidelijk laten aangroeien.

Wij gaan zo door, tot wij de cirkel rond zijn geweest, d.w.z. tot arg. z met 2π is toegenomen. Dan is de eindwaarde van arg. $w = \frac{\psi + 2\pi}{2}$, d. i. juist arg. w_2. *Terwijl wij dus als aanvangswaarde van w de waarde w_1 hadden gekozen, vinden wij als eindwaarde de waarde w_2.*

Hadden wij daarentegen als aanvangswaarde van w de waarde w_2 gekozen, dus als aanvangswaarde van arg. w de waarde $\frac{\psi + 2\pi}{2}$, dan hadden wij als eindwaarde van arg. w gevonden de waarde $\frac{\psi + 4\pi}{2}$. De waarden $\frac{\psi + 4\pi}{2}$ en $\frac{\psi}{2}$ van arg. w geven echter de-

1e. Zij $\varphi(z)$ de som van de reeks:

$$\frac{z}{z+1}+\left(\frac{z^2}{z^2+1}-\frac{z}{z+1}\right)+\left(\frac{z^3}{z^3+1}-\frac{z^2}{z^2+1}\right)+\ldots \quad (10).$$

Daar is m.a.w.

$$\varphi(z)=\lim_{n=\infty}\frac{z^n}{z^n+1} \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Is $|z|<1$, dan is $\lim\limits_{n=\infty} z^n=0$, en dus $\varphi(z)=0$.

Is $|z|>1$, dan is $\lim\limits_{n=\infty} z^n=\infty$, waaruit gemakkelijk volgt, dat dan $\varphi(z)=1$ is. De functie $\varphi(z)$ heeft dus overal de waarde 0 *binnen* de cirkel $|z|<1$, en overal de waarde 1 *buiten* de cirkel $|z|>1$. De lezer tone aan, dat de reeks (10) uniform convergeert binnen elke cirkel met O tot middelpunt en straal $r<1$, en evenzo buiten elke cirkel met O tot middelpunt en straal $r>1$.

De punten, waarvoor $|z|=1$, zijn *singuliere punten* van de functie $\varphi(z)$, daar deze in die punten *discontinu* is. Voor $z=+1$ is blijkbaar $\varphi(z)=\frac{1}{2}$; voor andere punten z, waarvoor $|z|=1$, is $\varphi(z)$ niet gedefiniëerd, daar hiervoor de limiet in het rechterlid van (11) niet bestaat.

Uit het voorgaande is duidelijk, dat de cirkel Γ_0 van zoeven hier de cirkel $|z|=1$ is. Daar $\varphi(z)$ in de omgeving van $z=0$ *constant* is, hebben *alle* afgeleiden van $\varphi(z)$ de waarde 0 voor $z=0$. De ontwikkeling van $\varphi(z)$ volgens Maclaurin is dus:

$$0+\frac{z}{1!}\cdot 0+\frac{z^2}{2!}\cdot 0+\ldots\ldots \quad (12).$$

Deze ontwikkeling convergeert *in het gehele z-vlak* en haar som heeft overal de waarde 0. In dit geval strekt het convergentiegebied van de reeks van Maclaurin zich dus *verder* uit dan de cirkel Γ_0; op en buiten Γ_0 stelt echter de reeks niet langer de functie $\varphi(z)$ voor.

2e. In de *tweede* plaats beschouwen wij de ontwikkeling:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots \quad \ldots \quad (13).$$

De functie $\frac{1}{1-z}$ heeft één singulier punt (een enkelvoudige pool), nl. het punt $z=1$; de cirkel Γ_0 is dus de cirkel $|z|=1$. Deze is in dit geval ook de convergentiecirkel van de reeks van Maclaurin.

Bepaal nu een lijnstuk N, zoodat

$$(N,\ AB) = [\mathbf{O}(\Gamma\Lambda,\ \Delta\Lambda),\ \mathbf{T}(T\Lambda)]$$

dan is

$$\text{symptoom: } [\mathbf{T}(K\Theta),\ \mathbf{O}(B\Theta,\ A\Theta)] = (N,\ AB).$$

Is nu (fig. 7 en 8) $BO = N$, en snijdt de rechte AO de loodlijn door Θ op AB in Σ, dan geldt

$$(\Theta\Sigma,\ A\Theta) = (N,\ AB)$$

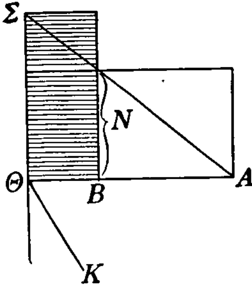


Fig 7.[1])

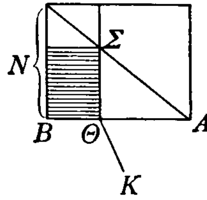


Fig 8.[1])

dus

$$[\mathbf{T}(K\Theta),\ \mathbf{O}(B\Theta,\ A\Theta)] = [\mathbf{O}(B\Theta,\ \Theta\Sigma),\ \mathbf{O}(B\Theta,\ A\Theta)]$$

of

$$\mathbf{T}(K\Theta) = \mathbf{O}(B\Theta,\ \Theta\Sigma).$$

Het vierkant op $K\Theta$, $\begin{cases}\text{hyperbolisch}\\ \text{elliptisch}\end{cases}$ aangepast (0,22 — 0,23) aan N met een $\begin{cases}\text{exces}\\ \text{defect}\end{cases}$ van zijdenverhouding $(N,\ AB)$, geeft dus een rechthoek met zijde $B\Theta$.

In algebraische symboliek:

$$(K\Theta = y,\ B\Theta = x,\ N = p,\ AB = a)$$

$$y^2 = px \pm \frac{p}{a}x^2 \quad \begin{pmatrix}+ \text{ voor amblytome.}\\ - \text{ voor oxytome.}\end{pmatrix}$$

(Vergelijking t.o.v. het *scheeve* stelsel met X as AB, oorsprong B, ordinaatrichting EZ).

1,3. Het blijkt dus, dat de behandelingswijze van Apollonios op twee principiëele punten verschilt van de (vermoedelijke) oorspronkelijke van Menaichmos:

a) Het symptoom wordt afgeleid met betrekking tot een van oneindig veel onderling gelijkwaardige diameters der snede, die elk ten aanzien van een daaraan toegevoegde richting lijn van scheeve symmetrie zijn; bij Menaichmos gold het ten opzichte van een

---

[1]) Bij het bovenste eindpunt van het lijnstuk N is de letter O weggevallen.

enkelen diameter (later as genoemd), die lijn van rechte symmetrie was. We zullen dit verder zoo uitdrukken, dat er bij Apollonios *scheeve toevoeging* is tusschen abscis en ordinaat, bij Menaichmos *rechte toevoeging*.

b) Het symptoom wordt uitgedrukt met behulp van de begrippen der oppervlakterekening, zooals die in Boek VI der *Elementen* van Euclides wordt ontwikkeld; dat geeft ten opzichte van Menaichmos geen wijziging in de behandeling van de orthotome (d.w.z. geen nieuwe wijziging naast den overgang van hoofdas op willekeurigen diameter), maar wel in die van amblytome en oxytome, die nu eerst hyperbool en ellips verdienen te heeten. Analytisch uitgedrukt wil dit zeggen, dat bij Apollonios ook voor amblytome en oxytome de vergelijking wordt geschreven ten opzichte van een assenstelsel, bestaande uit een willekeurigen diameter met de raaklijn in een zijner eindpunten.

1,4. Het probleem, dat zich nu bij de opstelling van de elementen der kegelsnedenleer bij Archimedes voordoet, bestaat hierin, dat men moet trachten aan te geven, op welk punt van de ontwikkeling der theorie, waarvan we nu begin- en eindpunt hebben leeren kennen, hij in zijn voortbrenging en behandeling der kegelsneden staat. Men heeft wel eens gemeend, dat men deze vraag onmiddellijk kon beantwoorden, door erop te wijzen, dat hij nog steeds de namen „snede van den recht-stomp-scherphoekigen kegel" gebruikt, die het standpunt van Menaichmos karakteriseeren en dat hij dus blijkbaar de kegelsneden nog steeds voortbracht door rechte cirkelkegels te snijden met vlakken, loodrecht op een beschrijvende. Dit argument lijkt ons weinig overtuigend: namen kunnen zich gemakkelijk handhaven, wanneer de inhoud der begrippen, die zij aanduiden, zich wijzigt en men zou met evenveel recht als de vermelde conclusie over Archimedes is getrokken, uit het feit, dat wij thans nog van hyperbool en ellips spreken, kunnen afleiden, dat wij deze krommen nog steeds voortbrengen met behulp van de Euclidische methode van aanpassing van oppervlakken.

Er is echter een krachtiger, hoewel eveneens terminologisch argument, dat pleit voor de aanname, dat de beschouwingswijze van Archimedes (althans van de Elementen, waarop hij voortbouwt) principiëel nog niet verschilt van die van Menaichmos. Wanneer hij namelijk het symptoom der orthotome opschrijft voor een punt met abscis $A\Theta$ en ordinaat $K\Theta$, dan luidt dit

$$\mathbf{T}(K\Theta) = \mathbf{O}(N, A\Theta)$$

en dan noemt hij lijnstuk N „het dubbele van het stuk tot de as" (ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος[1])). Dat is een omschrijving, die volkomen past bij de voortbrengingswijze van Menaichmos; immers in fig. 1 was

$$\mathbf{T}(K\Theta) = \mathbf{O}(2\,AT, A\Theta)$$

en dus was daar inderdaad $N = 2\,AT$, dus het dubbele van het stuk der beschrijvende rechte TA tusschen de kromme en de kegelas. Met de voortbrenging van Apollonios strookt deze omschrijving van het lijnstuk N in het geheel niet en ze doet dit evenmin met andere mogelijke voortbrengingswijzen, die men zich tusschen Menaichmos en Apollonios toegepast kan denken en waarbij òf een rechte cirkelkegel zou worden gesneden met een willekeurig vlak òf een scheeve met een vlak loodrecht op de hoofddoorsnede.

Het is duidelijk, dat deze terminologische overweging veel meer beduidt dan de daaraan voorafgaande, die de namen der kegelsneden betrof. Immers een parabool, hyperbool en ellips, voortgebracht volgens Apollonios, blijven niettemin sneden van een rechthoekigen, een stomphoekigen en een scherphoekigen kegel en men kan ze dus ter wille van de traditie zoo blijven noemen; maar het lijnstuk N, waaraan de vierkanten op de ordinaten parabolisch worden aangepast (παρ' ἂν δυνάνται αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς, zooals de omschrijving zoowel bij Archimedes als bij Apollonios luidt) is niet meer „het dubbele van het stuk tot de as", zoodra men de voortbrengingswijze van Menaichmos opgeeft en men kan zich moeilijk voorstellen, dat men dan toch deze uitdrukking, die geen afkortende technische term is, maar een omschrijving, blijft gebruiken.

De genoemde formeele argumenten worden ondersteund door andere, die nog nauwer met den inhoud der Archimedische kegelsnedentheorie samenhangen. Het valt ten eerste op, dat hij steeds spreekt van *den* diameter van orthotome en amblytome en van *de* twee diameters, den grootsten en den kleinsten, van de oxytome[2]);

---

[1]) Men lette er dus wel op, dat ἄξων de kegelas aanduidt en niet de rechte, die wij de as der parabool noemen. In dezen zin komt het woord bij Archimedes niet voor.

[2]) Men zal misschien willen opmerken, dat men uit het gebruik van de uitdrukkingen „grootste diameter" en „kleinste diameter" niet kan afleiden, dat er maar twee diameters worden beschouwd, omdat de assen toch ook opv. de grootste en de kleinste van alle diameters

blijkens den samenhang bedoelt hij daarmee de hoofdassen en hij beschouwt dus de symptomata der sneden (althans voorzoover die rechtstreeks uit de definitie volgen) blijkbaar als betrekking hebbend op rechte toevoeging.

Ook komt nergens in zijn beschouwingen over amblytome en oxytome de grootheid voor, die wij bij de uiteenzetting van de methode van Apollonios door N aanduidden en die van wezenlijke beteekenis is voor het verband van kegelsnedentheorie en Euclidische oppervlakterekening. Archimedes gebruikt, om het analytisch te zeggen, de vergelijkingen voor ellips en hyperbool steeds in den vorm

$$\frac{y^2}{x_1 x_2} = \text{const.}$$

en wel in rechte toevoeging en nooit in de Apollonische gedaante

$$y^2 = px \pm \frac{p}{a} x^2$$

waarbij de toevoeging scheef wordt gedacht [1]).

Al deze argumenten tezamen rechtvaardigen o.i. wel de conclusie, dat de kegelsnedentheorie van Archimedes in wezen nog geen andere is dan die van Aristaios en Euclides; dat hij in enkele opzichten, bij hen vergeleken, een stap vooruit deed in de richting van den weg, dien Apollonios zou betreden, zal uit de volgende bladzijden blijken; overigens echter bevestigt de lectuur van zijn geschriften den indruk, dien men uit de *Conica* van Apollonios krijgt: dat de geometer van Perga aan de leer der kegelsneden een essentieel nieuw fundament gaf, toen hij den scheeven cirkelkegel met willekeurig snijvlak aan de behandeling ten grondslag legde en de symptomata van alle drie de sneden met de begrippen der Euclidische oppervlakterekening in verband bracht.

Dat overigens de inhoud van de eerste vier boeken der *Conica*

---

zijn. In het Grieksch kan die conclusie echter wel getrokken worden, omdat uit het gebruik van den comparativus als superlativus in de uitdrukkingen *ἡ μείζων διάμετρος* en *ἡ ἐλάσσων διάμετρος* blijkt, dat er slechts van twee diameters sprake is. Wat ten slotte de amblytome betreft, dat hier maar van één diameter wordt gesproken, vindt zijn verklaring hierin, dat de amblytome slechts uit één tak van een hyperbool bestaat.

[1]) Zie hierbij echter III, 5, waar blijken zal, dat behandeling van ellips en hyperbool in scheeve toevoeging toch wel reeds voor Apollonios bekend was.

niet in alle opzichten nieuw was, is door zijn eigen uitlatingen bekend [1]. We zullen daarom zonder vrees voor anachronismen ook uit zijn werk kunnen putten, om de elementen der Archimedische kegelsnedenleer te reconstrueeren, mits we daarbij slechts, wat hij voor scheeve toevoeging vindt, voor rechte formuleeren en mits we slechts geen gebruik maken van proposities, die wezenlijk samenhangen met de begrippen van hyperbolische en elliptische aanpassing van oppervlakken. Men kan het ook zoo uitdrukken, dat men, over Archimedes sprekende, de amblytome nog niet als hyperbool en de oxytome nog niet als ellips mag beschouwen; tegen identificatie van orthotome en parabool bestaat minder bezwaar, omdat het symptoom van deze snede toch ook al bij Archimedes met behulp van (parabolische) aanpassing van oppervlakken wordt geformuleerd.

1,5. In de *Conica* van Apollonios volgen op de definities der sneden verschillende stellingen, die betrekking hebben op het aantal snijpunten, dat zij met rechten van verschillende soort (bv. al of niet parallel aan den diameter, al of niet in ordinaatrichting getrokken) gemeen hebben en op de relaties „binnen" en „buiten" ten opzichte van de snede. Beschouwingen van dezen aard, die de onderlinge ligging van elementen van de figuur betreffen, behooren nooit tot de sterkste zijde van de Grieksche mathesis: het ontbreken van de axiomatische basis, waarop ze zouden moeten worden opgebouwd, doet zich telkens weer gevoelen en onder den schijn van een abstract logisch betoog wordt toch herhaaldelijk stilzwijgend een beroep op de meetkundige voorstelling gedaan. Het ligt in de rede, dat de toestand der kegelsnedenleer op dit punt ten tijde van Archimedes niet beter is geweest dan bij Apollonios en dat we haar dus zeker niet onderschatten door de volgende stellingen uit de *Conica* als haar waarschijnlijke bestanddeelen te citeeren:

Conica I, 10. *Wanneer men op een kegelsnede twee punten neemt, zal de rechte, die deze punten verbindt, binnen de snede vallen en haar verlengde zal er buiten vallen* [2].

Conica I, 19. *In elke kegelsnede zal een rechte, uit een punt van den diameter in ordinaatrichting getrokken, de snede ontmoeten.*

---

[1] Apollonios, *Conica* I, 4.
[2] De Grieken maken geen verschil tusschen de termen „rechte lijn" en „recht lijnstuk". We volgen in de vertaling hun gebruik; de bedoeling is wel steeds uit den tekst op te maken.

1,6. De bovengemaakte opmerkingen over de voor onze opvattingen weinig bevredigende behandeling van liggingsrelaties in de Grieksche wiskunde gelden ook voor de wijze, waarop het raaklijnbegrip wordt ingevoerd. Hiervoor wordt bij alle krommen zonder wijziging de methode toegepast, die we uit de *Elementen* van Euclides voor den cirkel kennen: de raaklijn aan den cirkel wordt daar (III; Def. 2) bepaald als rechte, die den cirkel ontmoet en, verlengd, den cirkel niet snijdt, d.w.z. niet opnieuw ontmoet. Vervolgens wordt een voorwaarde afgeleid, die voor raken van een rechte aan een cirkel noodig en voldoende is en ten slotte wordt de nauwe aansluiting van zulk een rechte aan den cirkel nader geïllustreerd door de stelling, dat door het raakpunt geen (halve) rechte kan worden getrokken, waarvan alle punten tusschen de (halve) raaklijn en den cirkel liggen.

1,61. Voor andere krommen wordt de definitie niet eens meer opnieuw expliciet vermeld; echter ligt zij ten grondslag aan de afleiding van de voorwaarde, waaraan een rechte moet voldoen, om de kromme te raken; bij een volledige behandeling wordt bovendien dan voor iedere kromme opnieuw de eigenschap der nauwe aansluiting bewezen. Bij de kegelsneden ontmoet deze handelwijze geen bezwaar; van de andere krommen, waarvan de bestudeering in de oudheid vaststaat, t.w. de quadratrix van Hippias, de spiraal van Archimedes, de conchoide van Nikomedes en de cissoide van Diokles, gedoogt alleen de quadratrix de Euclidische opvatting zonder wijziging; bij de andere krommen ontmoet de raaklijn de kromme in het algemeen nog elders, terwijl in de buigpunten van de conchoide zelfs het voor de Grieksche zienswijze met het karakter van raken strijdige verschijnsel optreedt, dat de raaklijn de kromme in het raakpunt snijdt.

Het blijkt echter niet, dat de Grieksche wiskunde zich met het raaklijnprobleem voor quadratrix, conchoide en cissoide heeft bezig gehouden. En wat de spiraal van Archimedes betreft, hiervoor is de Euclidische definitie vol te houden, mits men zich, wat Archimedes voortdurend zal blijken te doen, telkens beperkt tot beschouwing van de afzonderlijke windingen, die opv. door het beschrijvende punt worden doorloopen, wanneer de voerstraal een volledige omwenteling van den nulstand uit maakt.

1,62. In de *Conica* van Apollonios ontmoeten we de volgende fundamenteele stellingen, die voor alle kegelsneden gelden:

Conica I, 17. *Indien men door den top*[1]) *eener kegelsnede een rechte in ordinaatrichting trekt, zal zij buiten de snede vallen.*

Dit volgt dadelijk uit de symmetrie-eigenschap van den diameter: ontmoette de getrokken rechte de snede nogmaals, dan zou de top der snede van de verkregen koorde tegelijk midden en eindpunt moeten zijn. De conclusie luidt, dat de rechte de snede dus in den top raakt.

Conica I, 32. *Indien men door den top der snede een rechte in ordinaatrichting trekt, zal zij de snede raken en in het gebied tusschen de snede en deze rechte zal geen andere rechte vallen.*

Bij het bewijs van deze stelling wordt onderscheiden tusschen de gevallen, dat de snede een parabool is en dat zij een ellips, een hyperbool of een cirkelomtrek is. We komen hierop bij de verschillende kegelsneden terug.

1,7. We zullen Archimedes in verband met kegelsneden herhaaldelijk over gelijkvormigheid hooren spreken. Hij heeft daaronder zeer waarschijnlijk hetzelfde verstaan als Apollonios, wiens opvatting geheel past in de Euclidische beschouwingswijze van gelijkvormigheid[2]); zijn definitie is, eenigszins verkort, als volgt weer te geven:

Wij noemen twee kegelsneden gelijkvormig, wanneer de lijnen in ordinaatrichting naar den diameter getrokken, evenredig zijn met de deelen van den diameter, die zij van af den top daarop bepalen[3]).

De bedoeling hiervan is als volgt:

Denk op elk der diameters een puntreeks met afstanden tot de homologe toppen resp. x_1, $x_2 \ldots$; ξ_1, $\xi_2 \ldots$, zoodat

$$(x_1, \xi_1) = (x_2, \xi_2) = (x_3, \xi_3) \text{ enz.}$$

terwijl dan voor de correspondeerende ordinaten y_1, $y_2 \ldots$; η_1, $\eta_2 \ldots$ enz. geldt

$$(y_1, x_1) = (\eta_1, \xi_1); \qquad (y_2, x_2) = (\eta_2, \xi_2) \text{ enz.}$$

Hieruit volgt dan

$$(y_1, \eta_1) = (y_2, \eta_2) = (y_3, \eta_3) \text{ enz.}$$

---

[1]) Top (κορυφή) eener kegelsnede heet elk uiteinde van een diameter.

[2]) *Elementen van Euclides* II, 87—88.

[3]) Apollonios, *Conica* VI, Def. 2.

Korter uitgedrukt komt dit hierop neer, dat er een constante λ is aan te wijzen, zoodat

uit $x = \lambda\xi$ volgt $y = \lambda\eta$.

2. DE ORTHOTOME.

2,0. De voortbrengingswijze werd reeds vermeld (1,1): loodrecht op een beschrijvende rechte van een rechten cirkelkegel, waarvan de meridiaandoorsnede een rechten tophoek heeft, wordt een plat vlak gebracht. De orthotome is nu de snede, die dit vlak op den kegelmantel bepaalt. Het punt, waar het snijvlak de beschrijvende, waar het loodrecht op staat ontmoet, heet *top* (κορυφή) der snede; de snijlijn van het snijvlak met het loodrecht daarop staande meridiaanvlak is voor de snede een lijn van rechte symmetrie, die de *diameter* (ἡ διάμετρος) heet [1]). Den afstand van een punt der snede tot den diameter duiden we reeds als *ordinaat* aan [2]), het stuk van den diameter tusschen de top en het voetpunt van de ordinaat als *abscis*. Het dubbele van het lijnstuk, begrensd door den top van de snede en den kegeltop (ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, *het dubbele van het stuk tot de as*) betitelen we reeds met den Apollonischen term *orthia* (ἡ ὀρθία πλευρά = *latus rectum* [3])). Het symptoom der snede luidt:

Het vierkant op de ordinaat van een punt der snede is gelijk aan den rechthoek, omvat door de abscis en de orthia.

Het wordt in toepassingen vaak gebruikt in den vorm:

De vierkanten op de ordinaten van twee punten der snede verhouden zich als de abscissen dier punten.

2,01. (*Conica* I, 22). *Een rechte, die met de orthotome twee punten gemeen heeft, snijdt den diameter buiten de snede.*

Het bewijs volgt uit de beschouwing van het trapezium, gevormd door het lijnstuk der snijpunten, hun ordinaten en den diameter.

2,02. (*Conica* I, 26). *Een rechte parallel met den diameter snijdt de snede steeds en slechts in een punt.*

Daar de ordinaat van een eventueel snijpunt bekend is, laat zich

---

[1]) Met diameter wordt de geheele snijlijn bedoeld, niet de halve rechte, die binnen de snede ligt.

[2]) Zie 1, 2; noot 5.

[3]) Men bedenke, dat het klassieke *latus rectum* het dubbele is van wat in de analytische meetkunde de parameter heet; in de vergelijking $y^2 = 2px$ is het *latus rectum* $2p$.

de abscis op grond van het snede-symptoom ondubbelzinnig construeeren.

2,03. *Van een rechte, parallel met den diameter, ligt de halve rechte, die aan de convexe zijde der snede ligt, buiten de snede, de andere halve rechte er binnen.*

Het bewijs van deze stelling is, in verband met het ontbreken van een omschrijving van de termen „binnen", „buiten" en „convex" bezwaarlijk te reconstrueeren; zooals blijken zal, wordt echter op de gestelde uitspraak voortgebouwd (6,32), zoodat ze in de *Elementen* moet zijn voorgekomen.

2,1. Zooals reeds in een voor alle kegelsneden geldende stelling vermeld werd (1,62), is de lijn, door den top in ordinaatrichting getrokken, raaklijn der snede. De ook reeds algemeen uitgesproken stelling, dat tusschen snede en raaklijn geen andere rechte kan vallen, wordt voor de orthotome als volgt bewezen (*Conica* I, 32):

Zij (fig. 9) van een orthotome met diameter AB en top A de raaklijn in den top $A\Gamma$. Laat $A\Delta$, door A binnen den hoek $BA\Gamma$ getrokken, de snede niet opnieuw ontmoeten. De rechte, door een willekeurig punt Δ van deze rechte in ordinaatrichting getrokken, snijde de snede in H, den diameter in E.

Fig 9.

Dan is

$$[\mathbf{T}(\Delta E),\ \mathbf{T}(AE)] > [\mathbf{T}(HE),\ \mathbf{T}(AE)] = (N,\ AE)$$

wanneer N de orthia voorstelt (2,0).

Bepaal nu een punt Θ op AB, zoodat

$$(N,\ A\Theta) = [\mathbf{T}(\Delta E),\ T(AE)]$$

dan is

$$A\Theta < AE.$$

Een rechte door Θ parallel aan ΔE moge de snede ontmoeten in Λ, de rechte $A\Delta$ in K.

Dan is

$$[\mathbf{T}(K\Theta),\ \mathbf{T}(A\Theta)] = [\mathbf{T}(\Delta E),\ \mathbf{T}(AE)] = (N,\ A\Theta) = [\mathbf{O}(N,\ A\Theta),\ \mathbf{T}(A\Theta)]$$

dus

$$\mathbf{T}(K\Theta) = \mathbf{O}(N,\ A\Theta) = \mathbf{T}(\Lambda\Theta)$$

dus valt K samen met Λ en dus ontmoet de rechte $A\Delta$ de snede in K.

2,2. Vervolgens kan een voorwaarde worden afgeleid, die vol-

doende is, opdat een rechte de orthotome zal raken in een ander punt dan de top.

2,20. (*Conica* I, 13). *Is (fig. 10) Γ een punt van de orthotome met abscis AB en is op den diameter aan den anderen kant van den top A als waar de abscis ligt, een lijnstuk AE gelijk aan BA uitgezet, dan zal van de rechte $E\Gamma$ ieder punt, dat van Γ verschilt, buiten de snede vallen. $E\Gamma$ zal dus de snede in Γ raken.*

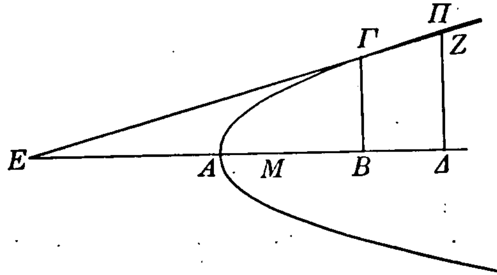


Fig 10.

Bewijs: Stel, dat een punt Z van $E\Gamma$ binnen de snede lag. Laat de loodlijn door Z op den diameter dezen ontmoeten in Δ, de snede in Π. Nu is wegens gelijkvormigheid

$$[\mathbf{T}(Z\Delta),\ \mathbf{T}(\Gamma B)] = [\mathbf{T}(E\Delta),\ \mathbf{T}(EB)] \qquad (1)$$

en wegens het snedesymptoom

$$[\mathbf{T}(\Pi\Delta),\ \mathbf{T}(\Gamma B)] = (A\Delta,\ AB) \qquad (2)$$

dus, daar $\Pi\Delta > Z\Delta$

$$(A\Delta,\ AB) > [\mathbf{T}(E\Delta),\ \mathbf{T}(EB)]$$

of
$$[\mathbf{O}(4AE,\ A\Delta),\ \mathbf{T}(EB)] > [\mathbf{T}(E\Delta),\ \mathbf{T}(EB)]$$

of
$$\mathbf{O}(4AE,\ A\Delta) > \mathbf{T}(E\Delta).$$

Dit is echter onmogelijk wegens Euclides II, 5 [1]). Immers A is niet het midden van $E\Delta$, dus

$$\mathbf{O}\,(AE,\ A\Delta) < \tfrac{1}{4}\,\mathbf{T}\,(E\Delta).$$

2,21. Om het gegeven bewijs algebraisch te formuleeren, stellen we de vergelijking der snede op het assenstelsel diameter-topraaklijn

$$y^2 = 2px$$

---

[1]) Volgens deze stelling is, als M het midden van ΔE voorstelt, $\mathbf{O}(AE,\ A\Delta) = \mathbf{T}(M\Delta) - \mathbf{T}(MA) < \mathbf{T}(M\Delta) = \tfrac{1}{4}\mathbf{T}(E\Delta)$.

Zijn dan de coördinaten van $\Gamma\,(x_1, y_1)$, van $Z\,(x_1 + t, y_2)$, van $\Pi\,(x_1 + t, y_3)$ dan luiden de twee boven opgestelde betrekkingen:

$$\frac{y_2^2}{y_1^2} = \frac{(2x_1 + t)^2}{4x_1^2} \;(1) \text{ en } \frac{y_3^2}{y_1^2} = \frac{x_1 + t}{x_1} \;(2)$$

waaruit wij afleiden

$$\frac{y_3^2}{y_2^2} = \frac{4x_1\,(x_1 + t)}{(2x_1 + t)^2}$$

zoodat we dadelijk aflezen:

$$y_3 < y_2$$

2,22. Dit is voor een lezer van onzen tijd natuurlijk veel eenvoudiger dan de Grieksche inkleeding. Ten deele komt dit door de indirecte formuleering van het bewijs van Apollonios, die hier, evenals op vele andere plaatsen, overbodig is. De Grieken hebben voor deze bewijsmethode een uitgesproken voorliefde: liever dan te bewijzen $y_3 < y_2$, bewijzen ze de onmogelijkheid van $y_3 > y_2$. (De mogelijkheid $y_3 = y_2$ is dan vanzelf uitgesloten, omdat in dat geval wegens *Conica* I, 10 toch weer andere punten van de rechte binnen de snede zouden liggen.)

Onderstellen we nu met Apollonios $y_3 > y_2$, dan vinden we als algebraische vertaling van het Grieksche bewijs uit (1) en (2)

$$\frac{x_1 + t}{x_1} > \frac{(2x_1 + t)^2}{(2x_1)^2}$$

of

$$\frac{4x_1\,(x_1 + t)}{(2x_1)^2} > \frac{(2x_1 + t)^2}{(2x_1)^2}$$

dus

$$4x_1(x_1 + t) > (2x_1 + t)^2. \qquad (3)$$

Wij zien nu op grond van onze kennis der merkwaardige producten onmiddellijk de ongerijmdheid hiervan in en vinden het bij eerste beschouwing gekunsteld, wanneer Apollonios zich, om hetzelfde inzicht te verwerven, beroept op een identiteit (Euclides II, 5), die, algebraisch geformuleerd, zou luiden

$$x_1\,(x_1 + t) = \left(\frac{2x_1 + t}{2}\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

Dit voorbeeld leert echter alleen, dat men door een dergelijke

algebraische vertaling niet tot de kern van den Griekschen gedachtengang doordringt. Voor een Griekschen wiskundige is nu eenmaal de identiteit van Euclides II, 5 even fundamenteel als voor ons een merkwaardig product en daarom springt voor hem de onmogelijkheid van

$$\mathrm{O}(4AE,\ A\Delta) > \mathrm{T}(E\Delta)$$

in verband met de identiteit

$$\mathrm{O}(AE,\ A\Delta) = \mathrm{T}(M\Delta) - \mathrm{T}(MA)$$

waarin M het midden van ΔE is, onmiddellijk in het oog.

2,23. Er is nu gebleken, dat de orthotome in ieder punt een raaklijn heeft. Er moet nu nog bewezen worden, dat er in ieder punt niet meer dan een raaklijn is, dus dat de voorwaarde, dat de subtangens het dubbele van de abscis is, niet alleen voldoende is

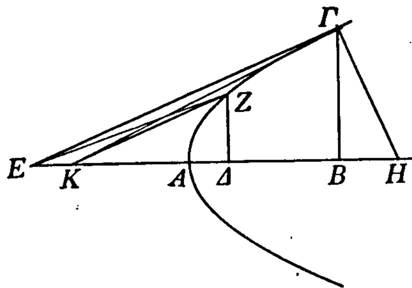


Fig 11.

maar ook noodig. Het bewijs van deze stelling luidt bij Apollonios als volgt (*Conica* I, 35):

Laat (fig. 11) een raaklijn $E\Gamma$ de snede in Γ met abscis AB raken. Is nu niet $EA = AB$, laat dan $A\Delta = EA$ zijn. Is $A\Delta$ nu abscis van een punt Z, aan denzelfden kant van den diameter gelegen als Γ, dan zal (2,2) EZ de snede in Z raken. EZ zal dan dus twee punten met $E\Gamma$ gemeen hebben, dus met $E\Gamma$ samenvallen. Dus ligt Z in Γ, Δ in B, dus is $EA = AB$. De conclusie, dat EZ behalve E nog een punt met $E\Gamma$ gemeen moet hebben, berust op de aanschouwelijke voorstelling, dat EZ, die de snede niet opnieuw mag ontmoeten, niet anders uit het gebied, dat door $E\Gamma$, de snede en den diameter wordt begrensd, komen kan, dan door $E\Gamma$ te passeeren. Voor het geval, dat Δ aan de andere zijde van B ligt, ondergaat het bewijs een voor de hand liggende wijziging.

Bewezen wordt nu verder nog, dat door Γ tusschen ΓE en de snede geen andere rechte te trekken is, die de snede slechts in Γ ontmoet, (d.w.z. dat er aan de zijde van ΓE, waar de snede ligt, geen halve rechte door Γ gaat, waarvan alle andere punten buiten de snede liggen). Was namelijk ΓK zulk een rechte en werd nu Δ bepaald door de voorwaarde $A\Delta = AK$, dan was KZ raaklijn in Z, terwijl ze (als boven) met $K\Gamma$ zou samenvallen, dus de snede opnieuw in Γ zou ontmoeten.

2,24. Uit de bewezen stelling aangaande den subtangens volgt onmiddellijk, dat de subnormaal van de orthotome constant is. Immers, wanneer de normaal van Γ in fig. 11 den diameter in H ontmoet en N de orthia voorstelt, heeft men

$$\mathbf{O}(BH,\ EB) = \mathbf{T}(\Gamma B) = \mathbf{O}(N,\ AB) = \mathbf{O}(\tfrac{1}{2}N,\ EB)$$

waaruit volgt $BH = \frac{1}{2}N$.

2,3. De voor ons doel belangrijkste eigenschap der prae-Apollonische kegelsnedentheorie is deze, dat het symptoom der orthotome, behalve voor den diameter, ook geldt ten opzichte van iedere rechte, door een punt van de snede parallel aan den diameter getrokken, mits men de richting van de raaklijn in dat punt als ordinaatrichting gebruikt. Dit beduidt, dat althans de orthotome vóór Apollonios ook reeds in scheeve toevoeging is behandeld, waarbij dan echter het principiëele verschil met het standpunt der *Conica* dit blijft, dat de mogelijkheid van scheeve toevoeging planimetrisch moet worden afgeleid, terwijl ze bij voortbrenging der snede op een scheeven cirkelkegel door een willekeurig snijvlak van den aanvang af aanwezig is.

Over de wijze, waarop de bedoelde eigenschap bij de oudere schrijvers bewezen kan zijn, bestaan geen aanwijzingen. We behandelen in het volgende een methode, die aannemelijk is wegens haar nauwen samenhang met den Apollonischen gedachtengang.

2,31 (verg. *Conica* I, 43). *Trekt men door een veranderlijk punt der orthotome rechten opv. parallel aan de raaklijn in den top en aan de raaklijn in een willekeurig vast punt der snede, dan bepalen deze twee rechten met den diameter een driehoek, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van den rechthoek, die de abscis van het veranderlijke punt en de ordinaat van het vaste punt tot zijden heeft.*

Zij (fig. 12) van de orthotome A de top met raaklijn AK, Γ het

vaste punt met ordinaat ΓB en met raaklijn ΓE (zoodat $EA = AB$), Δ het veranderlijke punt, waardoor naar den diameter getrokken zijn $\Delta H \,//\, \Gamma E$, $\Delta Z \,//\, AK$. Dan luidt de stelling:

$$\triangle\, \Delta ZH = \square\, ZK$$

Bewijs:

$$[(\triangle\, \Gamma BE,\ \triangle\, \Delta ZH)] =$$
$$= [\mathbf{T}(\Gamma B),\ \mathbf{T}(\Delta Z)] = (AB, AZ) =$$
$$= (\tfrac{1}{2} EB, AZ) = [(\Delta\, \Gamma BE, \square\, ZK)].$$

Dus is

$$\triangle\, \Delta ZH = \square\, ZK.$$

Fig 12.

2;32 Op grond van deze eigenschap kan nu het symptoom der orthotome in scheeve toevoeging worden afgeleid. Hiertoe bewijzen

Fig 13.

we (fig. 13), dat tusschen het lijnstuk $\Delta\Theta$, dat, parallel aan de raaklijn in Γ, naar de rechte door Γ parallel aan den diameter is getrokken en het lijnstuk $\Gamma\Theta$, dat het uiteinde Θ op die rechte bepaalt, de betrekking bestaat

$$\mathbf{T}\,(\Delta\Theta) = \mathbf{O}\,(M, \Gamma\Theta)$$

waarin M een nieuwe orthia voorstelt.

Bewijs: Snijden de raaklijnen in Γ en A elkaar in Σ, dan volgt uit $AB = AE$ dat ook $AE = K\Gamma$, dus

$$\triangle\, A\Sigma E = \triangle\, K\Sigma\Gamma.$$

Door wederzijdsche optelling van $A\Sigma\Gamma\Lambda ZA$ volgt hieruit wegens 2,31

$$E\Sigma\Gamma\Lambda ZE = \square\, AK\Lambda Z = \triangle\, \Delta HZ$$

dus na wederzijdsche aftrekking van $H\Theta\Lambda ZH$

$$\triangle\ \Delta\Lambda\Theta = \square\ \Gamma\Theta H E$$

of $$(\Delta\Theta,\ \Gamma\Theta) = (2\Gamma E,\ \Theta\Lambda)$$

Ook is $$(\Delta\Theta,\ \Gamma E) = (\Theta\Lambda,\ 2AB)$$

dus $$[\mathbf{T}(\Delta\Theta),\ \mathbf{O}(\Gamma\Theta,\ \Gamma E)] = (\Gamma E,\ AB).$$

Bepaal nu een lijnstuk M, zoodat $(\Gamma E, AB) = (M,\ \Gamma E)$, dan is

$$(\mathbf{T}(\Delta\Theta),\ \mathbf{O}(\Gamma\Theta,\ \Gamma E)] = (M,\ \Gamma E) = [\mathbf{O}(M,\ \Gamma\Theta),\ \mathbf{O}(\Gamma\Theta,\ \Gamma E)]$$

dus $$\mathbf{T}(\Delta\Theta) = \mathbf{O}(M,\ \Gamma\Theta).$$

2,321. Om de nieuwe orthia M in verband te brengen met de oorspronkelijke N, die bij de rechte toevoeging optrad, schrijven we

$$(M,N) = [\mathbf{O}(M,AB),\mathbf{O}(N,AB)] = [\mathbf{T}(\Gamma E),\mathbf{T}(\Gamma B)] = [\mathbf{T}(\Delta\Theta),\mathbf{T}(\Delta\Lambda)]$$

[in moderne notatie: $M = \dfrac{N}{\cos^2\varphi,}$ als φ den hoek der raaklijnen in Γ en A voorstelt].

In dezen vorm wordt de eigenschap in de propositie **C.S.** 3 geciteerd als voorkomende in de *Elementen der Kegelsneden.*

2,33. De mogelijkheid, de orthotome ook in scheeve toevoeging te behandelen, zal pas volledig bewezen zijn, wanneer ook nog vaststaat (fig. 13), dat de rechte door Γ parallel aan den diameter de koorden parallel aan de raaklijn in Γ halveert. Om dit aan te toonen, beschouwen we de koorde $\Delta\delta$ van de bedoelde richting, die de rechte door Γ parallel aan den diameter ontmoet in Θ. De ordinaat van δ zij $\delta\zeta$. Nu is (2,31)

$$\triangle\ \Delta ZH = \square\ KZ \text{ en } \triangle\ \delta\zeta H = \square\ K\zeta$$

dus $$\square\ \zeta\delta\Delta Z = \square\ \lambda Z \text{ dus}$$

$$\triangle\ \Delta\Theta\Lambda = \triangle\ \delta\Theta\lambda$$

dus $$\Delta\Theta = \delta\Theta.$$

Voor het geval, dat Δ en δ aan verschillende zijden van den diameter liggen, ondergaat het bewijs een voor de hand liggende wijziging.

2,34. Door de gegeven bewijzen heeft de prae-Apollonische kegelsnedentheorie het algemeene begrip van de in affiene beschouwing onderling gelijkwaardige diameters van een orthotome, elk met de richting van de raaklijn in het snijpunt met de snede als bijbehoorende ordinaatrichting verworven. We zagen echter reeds, dat ook

Archimedes deze conclusie nog niet ten volle trekt; voor hem blijft de lijn van rechte symmetrie *de* diameter en de orthiai van de verschillende mogelijke scheeve toevoegingen worden bij hem nog niet, zooals bij Apollonios, rechtstreeks met elkaar in verband gebracht, maar alle door de in 2,321 afgeleide betrekking met de orthia van den diameter. Des te meer valt het op, dat Archimedes bij de beschouwing van segmenten van de orthotome, d.w.z. figuren, begrensd door de snede en een koorde, het lijnstuk van de rechte parallel aan den diameter, die de koorde halveert, wel als diameter van het segment betitelt, hoewel hij de geheele rechte niet als diameter der snede beschouwt. Practisch is daardoor in de behandeling der orthotome ook in de terminologie het algemeene affiene standpunt der scheeve toevoeging toch bereikt. We zullen kortheidshalve de rechten parallel aan den diameter ook diameters noemen en den eigenlijken diameter zoo noodig als hoofddiameter daarvan onderscheiden.

2,35. Daar in de formuleeringen en bewijzen der proposities vermeld in 2,1; 2,2—2,23 nergens vermeld wordt, dat de ordinaatrichting loodrecht op de richting van den diameter staat, gelden deze stellingen onveranderd voor scheeve toevoeging.

In het bijzonder zijn nu bewezen te achten de volgende stellingen over de orthotome, die Archimedes citeert als bewezen in de *Elementen der Kegelsneden* (fig. 14. Hierin is telkens $AB\Gamma$ een orthotome met diameter $B\Delta$).

2,351. **Q.P.** 1. *Snijdt* $A\Gamma$ *parallel aan de raaklijn der snede in* B *de rechte* $B\Delta$ *in* Δ, *dan is* $A\Delta = \Delta\Gamma$. *Is omgekeerd* $A\Delta = \Delta\Gamma$, *dan is* $A\Gamma$ *parallel aan de raaklijn der snede in* B.

2,352. **Q.P.** 2. *Is* $A\Gamma$ *parallel aan de raaklijn in* B *en snijdt de rechte die de snede in* Γ *raakt, de rechte* $B\Delta$ *in* E, *dan is* $\Delta B = BE$.

2,353. Ten slotte is de eigenschap der scheeve toevoeging nu ook als volgt te formuleeren (fig. 14):

Zijn uit twee punten A *en* H *der snede de rechten* $A\Delta$ *en* HZ *parallel aan de raaklijn der snede in* B *naar den diameter getrokken, dan geldt*

$$[\mathbf{T}\,(A\Delta),\ \mathbf{T}\,(HZ)] = (B\Delta,\ BZ).$$

We zullen verder $A\Delta$ ook ordinaat en $B\Delta$ ook abscis noemen.

PROSPECTUS

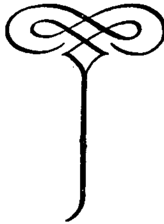
ALGEBRA

VOOR M.O. EN V.H.O.

DEEL II

DOOR

C. J. ALDERS
LERAAR R.K. LYCEUM TE HAARLEM



Deel I, gec. f 1.50
Deel II, gec. f 2.50

P. NOORDHOFF N.V. — 1935 — GRONINGEN-BATAVIA

Verkrijgbaar in de boekhandel.

In Ned. Oost-Indië uit voorraad verkrijgbaar bij
N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF,
Laan Holle 7, Batavia C.

VOORBERICHT.

Het is mijn bedoeling geweest in dit boekje de theorie overzichtelijk, volledig en begrijpelijk voor de leerlingen uiteen te zetten. De afwijkingen met verschillende andere werken van deze soort komen in hoofdzaak neer op het volgende.

1. In de eerste klasse wordt bij de ontbinding in factoren niet méér gegeven dan de typen $ap + bp$; $a^2 - b^2$; $a^2 \pm 2ab + b^2$ en $ax^2 + bx + c$. Deze zijn voor de verdere opbouw van de algebra ruim voldoende, terwijl ze zeker genoeg stof leveren om de vaardigheid te ontwikkelen; al het meerdere op dit gebied is m.i. een nodeloze plaag voor leraar en leerlingen. Ik heb dus weggelaten o.a. de ontbinding van $a^3 \pm b^3$; van $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ en van $x^4 + x^2 + 1$.

2. Over „verduisteren" van wortels bij het oplossen van een vergelijking is niet gesproken; de ervaring leert, dat men de leerlingen eraan kan wennen de methode van § 52 te gebruiken.

3. Het invoeren van wortels is besproken op een, zover ik weet, oorspronkelijke wijze, die de toets van critiek kan doorstaan (§ 53).

4. Bij de worteltrekking heb ik het standpunt ingenomen, dat deze bewerking eenduidig is, en dit consequent doorgevoerd. M.i. is dat het meest natuurlijke; het is mij een raadsel, hoe men kan afspreken, dat men onder $\sqrt{4}$ zal verstaan $+ 2$ en even verder aan de vergelijking $\sqrt{x+5} = -3$ kan laten voldoen door $x = 4$.

5. Men zal in het eerste deeltje de merkwaardige quotienten missen. Met vele anderen ben ik van mening, dat deze behandeld moeten worden met de reststelling, en dat de uitkomsten niet in goed vertrouwen aanvaard moeten worden, maar bewezen dienen te worden met een Bernoulliaans bewijs. Dit is dan ook in het tweede deeltje gedaan (hoofdstuk XV); ik denk me deze stof bestemd voor de vierde klasse.

6. De complexe getallen behoort men niet te bespreken of goed, en dit laatste lijkt me alleen mogelijk in de hoogste klasse. Ik heb ze daarom geplaatst aan het slot van het tweede deeltje, geleid door Wijdenes' overtuigend artikel in Euclides.

7. Nu voor het gymnasium en de H.B.S. de samen-

gestelde interestrekening niet meer op het schriftelijk examen gevraagd wordt, is het gelukkig niet meer nodig om daarover allerlei rariteiten te maken; ik heb deze stof dan ook binnen redelijke grenzen gehouden.

8. Bij het onderzoek der grafieken van zekere functies moeten verschillende begrippen, zoals „oneindig groot", relatieve extremen, asymptoten enz. nauwkeurig worden behandeld, anders ontaardt het onderzoek in een gecijfer volgens zekere regeltjes, en daarin kan ik geen nut zien. Aan deze begrippen is een apart hoofdstuk (XVI) gewijd, dat men desgewenst ook later kan bespreken.

9. Voor het werken met limieten geldt nog sterker dan voor complexe getallen: men moet het goed doen of helemaal niet. En dit laatste zou hoogst betreurenswaardig zijn, want het limietbegrip acht ik een der belangrijkste voor het wiskunde onderwijs, en beslist nodig om in de hoogste klasse grondig te bespreken. (Hoofdstuk XXV).

10. Hoofdstuk XXVI en XXVII bevatten een inleiding tot de hogere analyse; als de tekenen niet bedriegen, dan is de tijd niet ver meer, dat deze stof wordt opgenomen in het voorgeschreven programma, waarmee ik van harte zal instemmen. De ervaring bewijst overtuigend, dat dit gedeelte niet gaat boven het begrip van de gemiddelde leerlingen der hoogste klasse.

Ik betuig mijn dank aan den heer Wijdenes voor het tekenen der figuren en aan de firma Noordhoff voor de wijze, waarop aan mijn wensen werd voldaan.

Haarlem, Juli 1935. C. J. Alders.

INHOUD DEEL I

INHOUD DEEL II

2,4. Terwijl tot dusver de uiteenzetting van de theorie der orthotome een eenigszins systematisch karakter heeft gedragen, zal dit

Fig 14.

in het volgende niet meer het geval zijn, omdat we slechts die stellingen vermelden, die bij Archimedes als hulpstelling worden geciteerd of bewezen.

C.S. 3. *Indien van dezelfde orthotome twee segmenten worden afgesneden, die gelijke diameters hebben, zijn de segmenten onderling gelijk en evenzoo de ingeschreven driehoeken.*

Onder den ingeschreven driehoek van een segment wordt hierbij verstaan de driehoek, die de begrenzende koorde (basis) van het segment tot basis heeft en waarvan de top ligt in het punt, waar de diameter van het segment de snede ontmoet (ook top van het segment te noemen).

Zij (fig. 15) $B\Gamma\Theta$ een segment met top B, waarvan de diameter BH langs den hoofddiameter der snede valt, ΔEA een tweede segment met top Δ en diameter ΔZ. Gegeven is nu $BH = \Delta Z$.

Zij de orthia van den hoofddiameter N, dan is (2,321) de orthia M van den diameter ΔZ bepaald door de betrekking

$$(M, N) = [\mathbf{T}(AZ), \mathbf{T}(AK)]. \quad (1)$$

Wegens het symptoom der snede is nu

$$\mathbf{T}(\Theta H) = \mathbf{O}(N, BH)$$
$$\mathbf{T}(AZ) = \mathbf{O}(M, \Delta Z)$$

dus wegens $BH = \Delta Z$,

$$[\mathbf{T}(\Theta H, \mathbf{T}(AZ)] = (N, M).$$

Fig 15.

In verband met (1) volgt hieruit $AK = \Theta H$, dus, wegens $BH = Z$, $\triangle B\Theta H = \triangle \Lambda AZ$ dus ook $\triangle B\Theta\Gamma = \triangle \Delta AE$.

Wegens de later te bewijzen hoofdstelling van het werk *Quadratuur van de Parabool,* volgens welke de oppervlakte van het segment van een orthotome vier derde is van de oppervlakte van den ingeschreven driehoek, zijn nu ook de oppervlakten der segmenten $B\Gamma\Theta$ en ΔEA gelijk.

Indien van geen der twee segmenten de diameter langs den hoofddiameter der snede valt, wordt de gelijkheid der oppervlakten bewezen door beide te vergelijken met een segment, waarbij dit wel het geval is. Dat Archimedes zoo te werk gaat, inplaats van twee willekeurige segmenten rechtstreeks te vergelijken, bevestigt den reeds verkregen indruk, dat de rechte toevoeging voor hem toch het primaire geval is en dat hij de algemeene Apollonische stelling (*Conica* I, 49) over het verband der orthiäi van verschillende diameters niet bezit.

2,5. De propositie II,2 van het werk *Evenwichten van vlakke figuren* begint als volgt:

Indien in het segment, omvat door een rechte en een orthotome een driehoek wordt beschreven, die dezelfde basis heeft als het

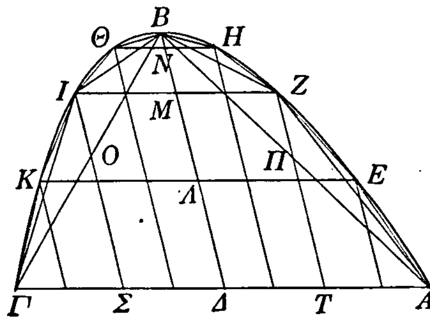


Fig 16.

segment en gelijke hoogte en opnieuw in de overblijvende segmenten driehoeken worden beschreven, die dezelfde bases hebben als de segmenten en gelijke hoogte en steeds in de overblijvende segmenten driehoeken op dezelfde wijze worden beschreven, laat dan gezegd worden, dat de ontstane figuur in het segment beschreven is „op de bekende wijze” (γνωρίμως).

Het is nu duidelijk, dat in de aldus ingeschreven figuur de lijnen, die de hoekpunten verbinden, welke het dichtst bij den top van het

segment liggen en die daarop volgen, parallel zullen zijn aan de basis van het segment en middendoor zullen worden gedeeld door den diameter van het segment en dat zij den diameter zullen verdeelen in de verhouding der opvolgende oneven getallen, wanneer één gelezen wordt bij den top van het segment. Deze dingen zullen te zijner tijd bewezen worden.

Dit bewijs ontbreekt. Men kan zich voorstellen, dat het als volgt geleverd kan zijn. Zij (fig. 16) in het segment $AB\Gamma$ de figuur $AEZ..B..\Gamma$ op de bekende wijze beschreven. De raaklijn van de snede in Z is dus parallel aan BA, die in H parallel aan BZ enz. Bekend is, dat de lijnen door de aldus bepaalde toppen der segmenten parallel aan den diameter de bases halveeren (2,351). Verlengt men nu b.v. IO en $Z\Pi$, tot zij $A\Gamma$ opv. snijden in Σ en T, dan is $\Delta\Sigma = \Delta T$. De ordinaten van I en Z ten opzichte van $B\Delta$ zijn dus gelijk, dus ook de abscissen. De rechten door I en Z parallel aan $A\Gamma$ snijden dus $B\Delta$ in een punt. Dus is IZ parallel aan $A\Gamma$. Hetzelfde bewijs geldt voor de puntenparen Θ, H; K, E; enz. Tevens is duidelijk, dat $B\Delta$ al deze lijnstukken halveert. De ordinaten van Θ, I, K, Γ, d.z. opv. ΘN, IM, $K\Lambda$, $\Gamma\Delta$ verhouden zich als de opvolgende getallen, de abscissen dus als de opvolgende vierkante getallen, de abscisverschillen, waarvan in de propositie sprake is, nl. BN, NM, $M\Lambda$, $\Lambda\Delta$, dus als de opvolgende oneven getallen.

2,6. **Q.P.** 4. (fig. 17a, b). *Laat $AB\Gamma$ een segment zijn, dat omvat*

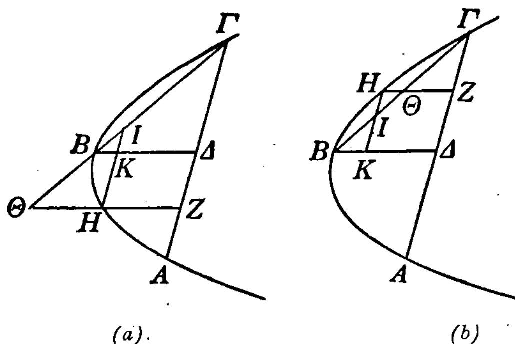


Fig 17.

wordt door een rechte en een orthotome, laat $B\Delta$ door het midden van $A\Gamma$ parallel aan den diameter getrokken of zelf diameter [1]) *zijn*

[1]) Hier bedoelt Archimedes met diameter weer uitdrukkelijk hoofddiameter.

en laat ΓB getrokken zijn en <eventueel> verlengd. Indien nu een andere rechte $Z\Theta$ parallel aan $B\Delta$ getrokken wordt, die de rechte $B\Gamma$ snijdt, zal $Z\Theta$ tot ΘH dezelfde reden hebben, die ΔA tot ΔZ heeft.

Bewijs. Laat de ordinaat van H de rechte $B\Gamma$ in I, $B\Delta$ in K snijden. Dan is

$$[\mathbf{T}\,(\Gamma\Delta),\ \mathbf{T}\,(HK)] = (B\Delta,\ BK)$$

dus $$[\mathbf{T}\,(\Gamma\Delta),\ \mathbf{T}\,(Z\Delta)] = (B\Gamma,\ BI)$$

of $$[\mathbf{T}\,(B\Gamma),\ \mathbf{T}\,(B\Theta)] = [\mathbf{T}\,(B\Gamma),\ \mathbf{O}\,(BI,\ B\Gamma)]$$

dus $$\mathbf{T}\,(B\Theta) = \mathbf{O}\,(BI,\ B\Gamma)$$

of $$(BI,\ B\Theta) = (B\Theta,\ B\Gamma).$$

Hieruit volgt $$(I\Theta,\ B\Theta) = (\Theta\Gamma,\ B\Gamma)$$

$$(I\Theta,\ \Theta\Gamma) = (B\Theta,\ B\Gamma)$$

of $$(H\Theta,\ \Theta Z) = (\Delta Z,\ \Delta\Gamma)$$

dus $$(\Theta Z,\ \Theta H) = (A\Delta,\ Z\Delta).$$

2,7. **Q.P.** 5 (fig. 18). *Laat $AB\Gamma$ een segment zijn, dat omvat wordt door een rechte en een orthotome en laat uit A ZA parallel aan den diameter getrokken worden en uit Γ de lijn ΓZ, die de snede in Γ raakt. Indien nu in den driehoek $ZA\Gamma$ een rechte wordt getrokken parallel aan AZ, dan zal de getrokken rechte door de orthotome in dezelfde verhouding worden verdeeld als $A\Gamma$ door de getrokken rechte. Homoloog zal daarbij zijn het stuk van $A\Gamma$ dat A tot eindpunt heeft met het stuk van de getrokken rechte, dat aan $A\Gamma$ grenst.*

Te bewijzen is dus, dat als $K\Lambda$ door een willekeurig punt K van de segmentbasis $A\Gamma$ parallel aan den diameter getrokken, de kromme in Θ ontmoet en ΓZ in Λ

$$(K\Theta,\ \Theta\Lambda) = (AK,\ K\Gamma).$$

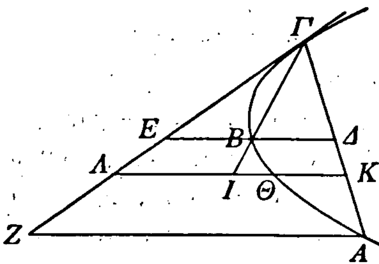


Fig 18.

Bewijs: Laat ΓB en $K\Lambda$ elkaar ontmoeten in I. Bekend is $EB = B\Delta$ dus $\Lambda I = IK$.

Ook is (2,6)

$$(KI,\ \Theta I) = (A\Delta,\ K\Delta)$$

dus $$(KI,\ \Theta K) = (A\Delta,\ AK)$$

of $$(\Lambda K,\ \Theta K) = (A\Gamma,\ AK)$$

of $$(\Lambda\Theta,\ \Theta K) = (\Gamma K,\ AK)$$

dus $$(\Theta K,\ \Theta\Lambda) = (KA,\ K\Gamma)$$

2,8. *Alle orthotomes zijn onderling gelijkvormig.*

Op grond van de boven gegeven definitie van gelijkvormigheid van twee kegelsneden (1,7) kan dit als volgt bewezen worden:

Laat van twee orthotomes de ordinaten en abscissen opv. zijn y en x, η en ξ, de orthiai N en M. Dan heeft men

$$\mathbf{T}(y) = \mathbf{O}(N, x)$$
$$\mathbf{T}(\eta) = \mathbf{O}(M, \xi)$$

Vestig nu tusschen de abscissen der twee krommen de betrekking

$$(x, \xi) = (N, M)$$

dan is

$$[\mathbf{T}(y), T(\eta)] = [\mathbf{O}(N, x), \mathbf{O}(M, \xi)] = [\mathbf{T}(x), \mathbf{T}(\xi)]$$

dus $(y, \eta) = (x, \xi)$ of $(y, x) = (\eta, \xi)$.

2,81. *Twee segmenten van orthotomes heeten gelijkvormig, wanneer de bases zich verhouden als de diameters, terwijl in beide de hoek van diameter en basis dezelfde is.*

3. DE OXYTOME.

3,0. Als voortbrengingswijze leerden we reeds kennen (1,1) de snijding van een rechten cirkelkegel, waarvan de meridiaandoorsnede een scherpen tophoek heeft, met een plat vlak, loodrecht op een beschrijvende rechte; als symptoom de betrekking tusschen den afstand van een punt der snede tot de as van rechte symmetrie en de twee abscissen, die het voetpunt van den ordinaat bepaalt op het lijnstuk, dat de zijden van de meridiaandoorsnede van de symmetrieas afsnijden (fig. 19):

$$[\mathbf{T}(\Gamma\Delta), \mathbf{O}(A\Delta, B\Delta)] = \text{const. (twee-abscissen-vorm).}$$

De constante waarde van deze verhouding is blijkbaar

$$[\mathbf{T}(EK), \mathbf{T}(AK)]$$

wanneer EK de ordinaat is, die op de middelloodlijn van AB ligt; uit het symptoom volgt verder gemakkelijk, dat deze middelloodlijn ook as van rechte symmetrie is. Zooals we reeds zagen, noemt Archimedes de lijnstukken, die de snede op de symmetrie-assen bepaalt, dus AB en EZ resp. grootsten en kleinsten diameter (ἡ μείζων διάμετρος en ἡ ἐλάσσων διάμετρος).

Onder diameter wordt echter ook wel de geheele rechte verstaan, die as van symmetrie is. Het symptoom wordt ook toegepast in den vorm

$$[\mathbf{T}(\Gamma\Delta), \mathbf{T}(KA) - \mathbf{T}(K\Delta)] = \text{const.} = [\mathbf{T}(EK(, \mathbf{T}(KA)]$$

3,01. Het symptoom der snede geldt in rechte toevoeging ook voor den kleinsten diameter. Is (fig. 19) namelijk ΓH loodrecht op EZ, dan is volgens Euclides II, 5:

Fig 19.

$$\mathbf{O}(A\Delta, B\Delta) = \mathbf{T}(AK) - \mathbf{T}(\Delta K)$$

terwijl

$$\mathbf{T}(\Gamma\Delta) = \mathbf{T}(HK) = \mathbf{T}(KE) - \mathbf{O}(EH, ZH).$$

Het symptoom

$$[\mathbf{T}(\Gamma\Delta), \mathbf{O}(A\Delta, B\Delta)] = [\mathbf{T}(EK), \mathbf{T}(KA)]$$

is nu te schrijven

$$[\mathbf{T}(KE) - \mathbf{O}(EH, ZH), \mathbf{T}(AK) - \mathbf{T}(\Delta K] = [T(KE), T(AK)]$$

waaruit permutando en separando volgt

$$[\mathbf{O}(EH, ZH), \mathbf{T}(\Delta K] = [\mathbf{T}(KE), \mathbf{T}(AK)]$$

of

$$[\mathbf{T}(\Gamma H), \mathbf{O}(EH, ZH)] = [\mathbf{T}(AK), \mathbf{T}(EK)].$$

Het snijpunt K der diameters heet *centrum* (κέντρον), elk hunner snijpunten met de snede *top.*

3,02. *Wanneer de verbindingslijn van twee punten der oxytome door het centrum gaat, wordt ze in het centrum middendoor gedeeld.*

Laat in fig. 19 $\Gamma\Theta$ de bedoelde rechte zijn, $\Gamma\Delta$ en $\Theta\Lambda$ de ordinaten der eindpunten.

Wegens het snedesymptoom is

$$[\mathbf{T}(\Gamma\Delta), \mathbf{O}(A\Delta, B\Delta)] = [\mathbf{T}(\Theta\Lambda), \mathbf{O}(A\Lambda, B\Lambda)]$$

of

$$[\mathbf{T}(\Gamma\Delta), \mathbf{T}(\Theta\Lambda)] = [\mathbf{T}(KA) - \mathbf{T}(K\Delta), \mathbf{T}(KA) - \mathbf{T}(K\Lambda)].$$

Waaruit wegens gelijkvormigheid der driehoeken $K\Delta\Gamma$ en $K\Lambda\Theta$ volgt

$$[\mathbf{T}(K\Delta), \mathbf{T}(K\Lambda)] = [\mathbf{T}(KA) - \mathbf{T}(K\Delta), \mathbf{T}(KA) - \mathbf{T}(K\Lambda)]$$

en dus

$$[\mathbf{T}(KA), \mathbf{T}(K\Delta)] = [\mathbf{T}(KA), \mathbf{T}(K\Lambda)]$$

dus $K\Delta = K\Lambda$. Hieruit volgt weer $K\Gamma = K\Theta$.

3,1. Uit het meegedeelde volgt gemakkelijk, dat er tusschen de ordinaten met gemeenschappelijk eindpunt van een oxytome en van den cirkel, die den grootsten diameter daarvan tot middellijn heeft, een constante verhouding bestaat, die gelijk is aan de verhouding van den kleinsten tot den grootsten diameter. Dit wordt toegepast in de propositie:

C.S. 4. *Ieder oppervlak, omvat door een oxytome, heeft tot den cirkel die den grootsten diameter der snede tot diameter heeft, dezelfde reden, die de kleinste diameter tot den grootsten of tot den diameter van den cirkel heeft.*

Het bewijs hiervan wordt geleverd door beschouwing (fig. 20)

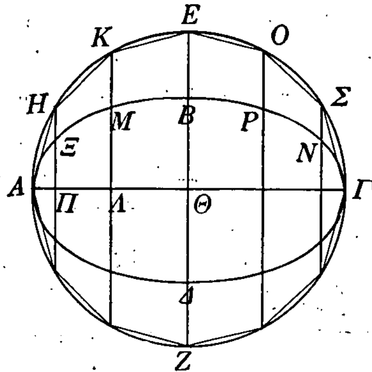


Fig 20.

van een in den hoofdcirkel beschreven regelmatig polygoon $AHK \ldots \Gamma \ldots Z \ldots A$ en het correspondeerende in de oxytome beschreven polygoon $A\Xi \ldots M \ldots \Gamma \ldots \Delta \ldots A$, waarbij de benoodigde overgang tot de limiet naar Griekschen trant door een indirect bewijs wordt vervangen. Daar de hier toe te passen methode in beginsel voldoende bekend is uit Euclides XII, zullen we op dit bewijs niet ingaan.

3,11. Uit het verkregen resultaat volgt gemakkelijk, dat de oppervlakten van een oxytome en een cirkel zich verhouden als de rechthoek, die door de diameters der snede wordt omvat tot het vierkant op den cirkeldiameter (**C.S.** 5) en dat de oppervlakten van twee oxytomes zich verhouden als de rechthoeken, die in elk der sneden door de diameters omvat worden (**C.S.** 6).

3,2. Wat tot dusver over de oxytome vermeld werd, past geheel in de voorstelling, die we ons van den oorspronkelijken vorm der kegel-

snedentheorie hebben gevormd. Archimedes wijdt echter in het werk *Over Conoiden en Sphaeroiden* enkele uitvoerige proposities aan de mogelijkheid van ligging eener oxytome op een scheeven cirkelkegel, blijkbaar een nieuw door hem aan de orde gesteld probleem, dat de ruimere opvatting over voortbrenging der kegelsneden van Apollonios moet hebben voorbereid.

C.S. 7. *Wanneer een oxytome gegeven is en een rechte door het centrum loodrecht op het vlak, waarin de snede ligt, is het mogelijk een kegel te vinden, die het uiteinde der loodlijn tot top heeft en op welks oppervlak de gegeven oxytome ligt.*

Laat (fig. 21) het vlak van teekening het vlak zijn door den *kleinsten* diameter AB der snede en de loodlijn $\Delta\Gamma$, door haar centrum Δ op haar vlak opgericht. Γ is het punt, dat top van den kegel moet worden, N de helft van den grootsten diameter. Trek nu door A een rechte, die het verlengde van $\Gamma\Delta$ in E en het verlengde van ΓB in Z ontmoet, zoodat

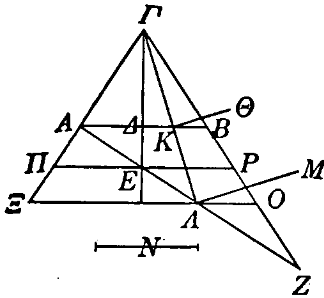


Fig 21.

$$[\mathbf{O}(AE, EZ), \mathbf{T}(\Gamma E)] = [\mathbf{T}(N), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)] \qquad (1)$$

Archimedes merkt hierbij op, dat dit mogelijk is, omdat

$$[\mathbf{O}(AE, EZ), \mathbf{T}(\Gamma E)] > [\mathbf{O}(A\Delta, \Delta B), \mathbf{T}(\Gamma\Delta[). \qquad (2)$$

Op de beteekenis van deze opmerking komen we terug in 3,22.

Breng nu door AZ een vlak loodrecht op het vlak van teekening en bepaal hierin den cirkel met diameter AZ; deze cirkel is nu de basiskromme van den gevraagden kegel met top Γ.

Bewijs: Zij Θ een punt der oxytome met ordinaat ΘK ten opzichte van AB, laat ΓK verlengd AZ in Λ snijden en laat de loodlijn, door Λ op het vlak van teekening opgericht (naar denzelfden kant als waar Θ ligt) den cirkel met diameter AZ in M ontmoeten. Door Λ is nog getrokken ΞO, door E ΠP, beide parallel aan AB. Er zal nu bewezen worden, dat Θ op ΓM ligt.

Men heeft namelijk

$$(AE, A\Lambda) = (\Pi E, \Xi\Lambda)$$

$$(ZE, Z\Lambda) = (PE, O\Lambda)$$